Pondichéry avril 2010

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples (a, b) d'entiers strictement positifs, tels que $a^2 = b^3$.

Soit (a, b) un tel couple et $d = \text{PGCD}(a, b)$. On note u et v les entiers tels que $a = d\,u$ et $b = d\,v$.

1. Montrer que $u^2 = d\,v^3$.
2. En déduire que v divise u, puis que $v = 1$
3. Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs.

Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

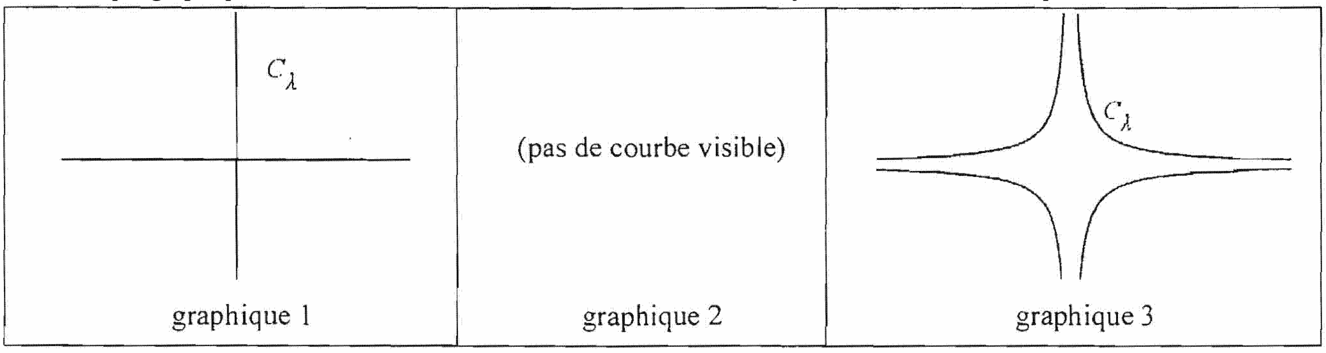
Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère 1a surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.

Pour tout réel λ, on note C_λ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de C_λ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ.

Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.



2. *a*. Déterminer le nombre de points de C_{25} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

b. Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question 3 de la partie A.

Déterminer le nombre de points de C_{2010} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

CORRECTION

Partie A

1. Soit (a, b) un tel couple et $d = \text{PGCD}(a, b)$. il existe deux entiers u et v premiers entre eux tels que $a = d\,u$ et $b = d\,v$.

donc en remplaçant : $(d\,u)^2 = (d\,v)^3$ soit $d^2\,u^2 = d^3\,v^3$

$d \neq 0$ donc $u^2 = d\,v^3$.

2. $u^2 = d\,v^3$ donc v divise u^2, soit v divise $u \times u$

d'après le théorème de Gauss, v divise $u \times u$ et v et u sont premiers entre eux, donc v divise u

PGCD $(u ; v) = 1$ or si v divise u, PGCD $(u ; v) = v$ donc $v = 1$

3. si $a^2 = b^3$, d'après la question précédente $v = 1$ donc en remplaçant dans $b = d\,v$ et $u^2 = d\,v^3$, on obtient $b = d$ et $u^2 = d$ donc $a = d\,u = u^3$ et $b = u^2$ donc a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

Réciproquement

si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier d, alors il existe un entier k tel que $a = k^3$ et $b = k^2$

donc $a^2 = (k^3)^2 = k^6$ et $b^3 = (k^2)^3 = k^6$ donc $a^2 = b^3$

donc $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

S'il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 = b^3$ alors d'après la question précédente il existe un entier k tel que $a = k^3$ et $b = k^2$ donc tel que $n = k^6$

k	0	1	2	3	4	5	6
k^6	0	1	1	1	1	1	1

donc $n \equiv 0$ [7] ou $n \equiv 1$ [7].

Partie B

1. C_λ a pour équations : $x^2 \times y^2 = \lambda^3$ et $z = \lambda$

Si $\lambda < 0$ il est impossible que $x^2 \times y^2$ qui est positif ou nul, soit égal à λ donc C_λ est le graphique 2

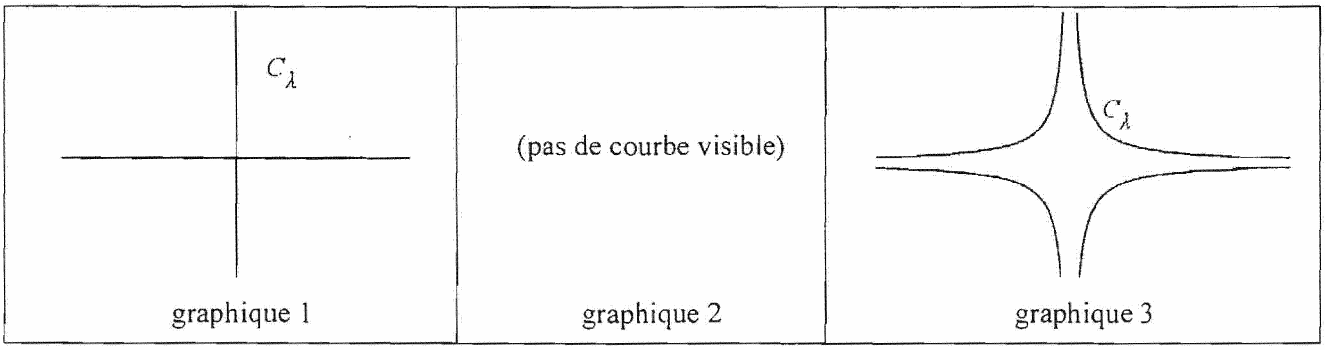
Si $\lambda = 0$ alors $x^2 \times y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ donc C_λ est le graphique 1, C_λ est la réunion des deux axes dans le plan d'équation $z = \lambda$

Si $\lambda > 0$ par élimination ; le graphique 3 représente la courbe C_λ.

Si $\lambda > 0$, C_λ est l'ensemble des points du plan d'équation $z = \lambda$ tels que $x^2 \times y^2 = \lambda^3$

ce qui se décompose en deux parties : $x\,y = \sqrt{\lambda^3}$ et $x\,y = -\sqrt{\lambda^3}$ soit $y = \lambda\dfrac{\sqrt{\lambda}}{x}$ et $y = -\lambda\dfrac{\sqrt{\lambda}}{x}$

C_λ, quand $\lambda > 0$, est donc la réunion de deux hyperboles équilatères.



2. *a*. C_{25} a pour équations : soit $y = \dfrac{\sqrt{25^3}}{x}$ soit $y = -\dfrac{\sqrt{25^3}}{x}$ dans le plan d'équation $z = 25$

Soit C_{25} a pour équations : soit $y = \dfrac{125}{x}$ soit $y = -\dfrac{125}{x}$ dans le plan d'équation $z = 25$

Si les coordonnées des points de C_{25} sont des nombres entiers strictement positifs alors $y > 0$ et $\dfrac{125}{x}$ est un entier strictement positif donc x est un entier strictement positif qui divise 125
soit $x = 1$ ou $x = 5$ ou 25 ou 125.

les points cherchés ont donc pour coordonnées A_1 (1 ; 125 ; 25), A_2 (5 ; 25 ; 25), A_3 (25 ; 5 ; 25) et A_4 A_2 (125 ; 1 ; 25)

b. C_{2010} a pour équations : $(x\,y)^2 = z^3$ avec $z = 2010$
d'après la question a. 3. *a*. : $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier, avec ici $a = x\,y$ et $b = z$
or 2010 n'est pas le carré d'un nombre entier donc l'équation $(x\,y)^2 = 2010^3$ n'a pas de solutions entières.