1. Montrer que : pour tout n de $\mathbb{Z}$, n^2 n'est pas congru à 5 modulo 8.

2. On pose $f(n) = \dfrac{3n^3 + n^2 + n + 3}{3n^2 + 1}$ et $d = \text{PGCD}(3n^3 + n^2 + n + 3 ; 3n^2 + 1)$.

a. Montrer que $d = \text{PGCD}(3n^2 + 1 ; 8)$.
b. Montrer que $d \neq 8$
c. En déduire les valeurs possibles de d.
d. Trouver (S) l'ensemble des valeurs de n dans $\mathbb{Z}$ pour laquelle $d = 4$

e. Trouver (F) l'ensemble des valeurs n dans $\mathbb{Z}$ pour laquelle $f(n) \in \mathbb{Z}$.

CORRECTION

1.

modulo 8, n est congru	0	1	2	3	4	5	6	7
modulo 8, n^2 est congru	0	1	4	1	0	1	4	1

Pour tout n de $\mathbb{Z}$, n^2 est congru à 0 ; 1 ; ou 4 donc n'est pas congru à 5 modulo 8.

2. On pose $f(n) = \dfrac{3n^3 + n^2 + n + 3}{3n^2 + 1}$ et $d = \text{PGCD}(3n^3 + n^2 + n + 3 ; 3n^2 + 1)$.

a. On utilise ici que $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a - k\,b ; b)$ où k est un entier relatif quelconque
$\text{PGCD}(3n^3 + n^2 + n + 3 ; 3n^2 + 1) = \text{PGCD}(3n^3 + n^2 + n + 3 - n(3n^2 + 1) ; 3n^2 + 1)$.
donc $d = \text{PGCD}(n^2 + 3 ; 3n^2 + 1)$ donc $d = \text{PGCD}(3(n^2 + 3) - (3n^2 + 1) ; 3n^2 + 1)$
$d = \text{PGCD}(3n^2 + 1 ; 8)$.

b. Si $d = 8$ alors d divise $3n^2 + 1$ donc $3n^2 + 1 \equiv 0$ modulo 8 soit $3n^2 \equiv 7$ modulo 8
$3 \times 3n^2 \equiv 3 \times 7$ modulo 8 or $9 \equiv 1$ modulo 8 et $21 = 8 \times 2 + 5$ donc $21 \equiv 5$ modulo 8 soit $n^2 \times 5$ modulo 8
D'après la première question, pour tout n de $\mathbb{Z}$, n^2 n'est pas congru à 5 modulo 8 donc l'hypothèse $d = 8$ est rejetée, $d \neq 8$.

c. En déduire les valeurs possibles de d.
$d = \text{PGCD}(3n^2 + 1 ; 8)$ et $d \neq 8$ donc d est un diviseur positif de 8 autre que 8 donc $d \in \{1 ; 2 ; 4\}$

d. Trouver S l'ensemble des valeurs de n dans $\mathbb{Z}$ pour laquelle $d = 4$.
Si $d = 4$ alors 4 divise $3n^2 + 1$ donc $3n^2 + 1 \equiv 0$ modulo 4 donc $3n^2 \equiv 3$ modulo 4
$3 \times 3n^2 \equiv 3 \times 3$ modulo 4 soit $n^2 \equiv 1$ modulo 4

modulo 4, n est congru	0	1	2	3
modulo 4, n^2 est congru	0	1	0	1

Si $n^2 \equiv 1$ modulo 4donc $n \equiv 1$ modulo 4 ou $n \equiv 3$ modulo 4 soit $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 3$

Si $n = 4k + 1$: $3n^2 + 1 = 3(4k + 1)^2 + 1 = 3 \times 4^2 k^2 + 3 \times 2 \times 4k + 4 = 4(12k^2 + 6k + 1)$
$12k^2 + 6k + 1$ est un nombre impair donc $3n^2 + 1$ est divisible par 4 et non par 8 donc $d = 4$

Si $n = 4k + 3$: $3n^2 + 1 = 3(4k + 3)^2 + 1 = 3 \times 4^2 k^2 + 3 \times 2 \times 4k \times 3 + 28 = 4(12k^2 + 18k + 7)$
$12k^2 + 18k + 7$ est un nombre impair donc $3n^2 + 1$ est divisible par 4 et non par 8 donc $d = 4$
$S = \{ 4k + 1 ; 4k + 3 , k \in \mathbb{Z}\}$

e. $f(n) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3n^2 + 1$ divise $3n^3 + n^2 + n + 3 \Leftrightarrow d = 3n^2 + 1$
$d = \text{PGCD}(3n^2 + 1 ; 8) = 3n^2 + 1$
d prend les valeurs 1 ; 2 ; 4 donc on a soit $3n^2 + 1 = 1$ soit $3n^2 + 1 = 2$ soit $3n^2 + 1 = 4$

$3n^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow 3n^2 = 0 \Leftrightarrow n^2 = 0 \Leftrightarrow n = 0$
$3n^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow 3n^2 = 1$ donc 3 divise 1 ce qui est impossible donc $3n^2 + 1 \neq 2$
$3n^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow 3n^2 = 3 \Leftrightarrow n^2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$ ou -1
$F = \{-1 ; 0 ; 1\}$