1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n <$ N Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et N = 2. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et, pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. *a.* Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \le v_n$.

3. *a.* Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et u_{n+1}^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

CORRECTION

1.

n	a	b	u	v
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2. *a.* Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
Initialisation : $u_0 = a$, $v_0 = b$ or a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ donc $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$
Hérédité : Montrons pour tout n de $\mathbb{N}$, que si $u_n > 0$ et $v_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.

$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ or $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$ or $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $v_{n+1} > 0$. La propriété est héréditaire

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2$.

$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \dfrac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n}{4}$.

$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \dfrac{u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n}{4} = \dfrac{u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n}{4}$

pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0$

donc $v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2$, or pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $v_n \geq u_n$.
Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

3. *a.* $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ or pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$ donc $\dfrac{u_n + u_n}{2} \leq \dfrac{u_n + v_n}{2}$ soit $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

b. pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$

or $\left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2 \geq 0$ donc $v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2$.

$v_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ or pour tout entier naturel n, on a $u_n^2 \leq v_n^2$

donc $\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} \leq \dfrac{v_n^2 + v_n^2}{2}$ donc $v_{n+1}^2 \leq v_n^2$
or pour tout n entier naturel, $v_n \geq 0$ donc $v_{n+1} \leq v_n$, donc la suite (v_n) est décroissante.

4. Pour tout n entier naturel, $u_n \leq v_n$ or la suite (v_n) est décroissante donc $v_n \leq v_0$ donc pour tout n entier naturel, $u_n \leq v_0$
La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc est convergente.
Pour tout n entier naturel, $0 \leq v_n$. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 donc est convergente.

Soit ℓ la limite de (u_n) et L la limite de (v_n) pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc $\ell = \dfrac{\ell + L}{2}$ donc $\ell = L$.