Polynésie juin 2011

Exercice 1 (5 points) Commun à tous les candidats.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1. Soient A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$.

Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 2i|$.

Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i + z| = 1 + |z|$.

5. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 2 (5 points) Enseignement obligatoire

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0{,}1$.

1. Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$.

Exercice 2 (5 points) Enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1$ (modulo p).

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $u_0 = 1$et, pour tout entier naturel n ,$u_{n+1} = 10\,u_n + 21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. *a.* Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3\,u_n = 10^{n+1} - 7$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. *a.* Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3\,u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo11).

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. *a.* Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1$(modulo17).

b. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
  Pour tous réels α et β, $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- Si u désigne une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et U une primitive de u sur $[a\,;\,b]$

alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \left[U(x)\right]_a^b = U(b) - U(a)$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, démontrer la formule d'intégration par parties.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ est donnée en annexe.

1. *a.* Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe (C) passant par O.

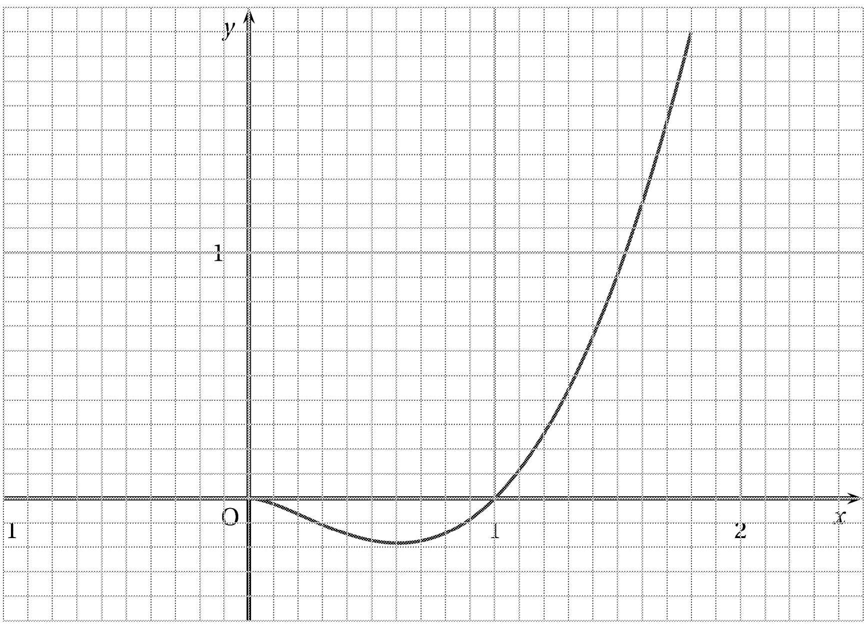
Préciser une équation de cette tangente.

3. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$.

On note V une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que : $V = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \pi\,[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

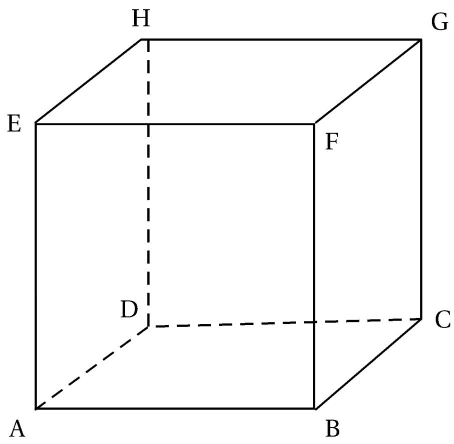
a. Montrer qu'une primitive de la fonction $x \to x^4 \ln x$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ est la fonction $x \to \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1)$.

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : $V = \frac{\pi}{125}\left(2 - \frac{37}{\mathrm{e}^5}\right)$.



Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats.

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

On note K le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2).

Partie A

1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3. Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment [HG].

On note $m = \mathrm{H}M$ (m est donc un réel appartenant à [0 ; 1]).

1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0 ; 1], le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1 + m)\,x + y - m\,z = 0$.

3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).

a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0 ; 1], $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$.

b. Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.

c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

CORRECTION

Exercice 1 (5 points) Commun à tous les candidats.

1. Proposition 1 : VRAIE

$OA^2 = |2 - 5\,i|^2 = 2^2 + 5^2 = 29$; $|AB|^2 = |(7 - 3\,i) - (2 - 5\,i)|^2 = |5 + 2\,i|^2 = 29$

$OB^2 = |7 - 3\,i|^2 = 49 + 9 = 58$ donc OA = AB et $OA^2 + AB^2 = OB^2$ donc le triangle OAB est rectangle isocèle en A.

2. Proposition 2 : : VRAIE

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe (– 2 i) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 2\,i|$ est l'ensemble (Δ) des points M tels que $MA = MB$ donc est la médiatrice de [AB]. A et B appartiennent à l'axe des imaginaires pur donc (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

Autre solution :

En utilisant l'expression algébrique de l'affixe de M : $z = x + i\,y$ avec x et y réels alors

$|z - i| = |z + 2\,i| \Leftrightarrow |z - i|^2 = |z + 2\,i|^2 \Leftrightarrow |x + i\,(y - 1)|^2 = |x + i\,(y + 2)|^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + (y + 2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\,y + 1 = x^2 + y^2 + 4\,y + 4 \Leftrightarrow 6\,y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$.

3. Proposition 3 : FAUSSE

$z = \sqrt{3}\,(\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $z^3 = \left(2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = 2^3 \times 3\sqrt{3}\,e^{i\,3\times\frac{\pi}{6}}$

$z^3 = 24\sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $z^3 = 24\sqrt{3}\ i$ donc $z^6 = -24^2 \times 3$, z^6 n'est pas imaginaire pur.

4. Proposition 4 : VRAIE

Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors il existe un réel y tel que $z = i\,y$ avec $y > 0$

$|i + z| = |i\,(1 + y)| = |1 + y|$ or $y > 0$ donc $1 + y > 0$ donc $|i + z| = 1 + y$

$y > 0$ donc $|z| = y$ et $1 + |z| = 1 + y = |i + z|$

5. Proposition 5 : VRAIE

si le module de z est égal à 1 alors $z\,\bar{z} = 1$ donc $\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{\bar{z}^2}{z^2\,\bar{z}^2} = \bar{z}^2$ donc $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = z^2 + \bar{z}^2$

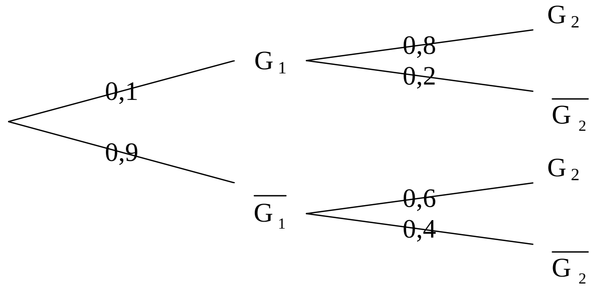
les complexes z^2 et $\bar{z}^2$ sont conjugués donc $z^2 + \bar{z}^2$ est un nombre réel, donc $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Autre solution :

si le module de z est égal à 1 alors il existe un réel α tel que $z = e^{i\,\alpha}$ alors $\bar{z} = e^{-i\,\alpha}$ donc $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = e^{i\,2\,\alpha} + e^{-i\,2\,\alpha} = 2\cos(2\,\alpha)$

donc $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 2 (5 points) Enseignement obligatoire



1. Si le joueur gagne au bout des deux parties, il a soit gagné deux fois de suite ($G_1 \cap G_2$) soit perdu la première partie et gagné la dernière ($\overline{G_1} \cap G_2$)

$p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2)$

$p_2 = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,62$.

2. $p_{G_2}(\overline{G_1}) = \dfrac{p(\overline{G_1} \cap G_2)}{p(G_2)} = \dfrac{0,9 \times 0,6}{0,62} = \dfrac{27}{31} \approx 0,87$

3. L'événement « le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties » est l'événement contraire de « le joueur perd les trois premières parties » donc $p = 1 - p(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) = 1 - 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,856$

4. Si le joueur gagne la $(n + 1)^{\text{ème}}$ partie alors il a soit gagné la partie précédente et gagné la $(n + 1)^{\text{ème}}$ partie ($G_n \cap G_{n+1}$) soit perdu partie précédente et gagné la $(n + 1)^{\text{ème}}$ partie ($\overline{G_n} \cap G_{n+1}$)

donc $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6$

$p_{n+1} = 0,2\, p_n + 0,6$ soit $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{3}{5}$.

5. Si $n = 1$, $p_1 = 0,1$ or $\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{15-13}{4 \times 5} = \dfrac{2}{20} = 0,1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$

Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ alors $p_{n+1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$.

$p_{n+1} = \dfrac{1}{5} p_n + \dfrac{3}{5}$ or $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ donc $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right) + \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{3+12}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

$p_{n+1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

6. $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = = \dfrac{3}{4}$

7. $\dfrac{3}{4} - p_n = \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ donc $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \Leftrightarrow \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^n < \dfrac{4}{13} \times 10^{-7} \Leftrightarrow 5^n > \dfrac{13}{4} \times 10^7$

$\Leftrightarrow n \ln 5 > \ln\left(\dfrac{13}{4} \times 10^7\right) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{13}{4} \times 10^7\right)}{\ln 5} \Leftrightarrow n \geq 11$

Exercice 2 (5 points) Enseignement de spécialité

1. $u_1 = 10\,u_0 + 21 = 31$; $u_2 = 10\,u_1 + 21 = 331$ et $u_3 = 10\,u_2 + 21 = 3331$.

2. *a.* Si $n = 0$, $u_0 = 1$ or $10^1 - 7 = 3$ donc $3\,u_0 = 10^{0+1} - 7$, la propriété est vraie pour $n = 0$.
Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $3\,u_n = 10^{n+1} - 7$ alors $3\,u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$.
$u_{n+1} = 10\,u_n + 21$ donc $3\,u_{n+1} = 10 \times 3\,u_n + 63$ or $3\,u_n = 10^{n+1} - 7$ donc $3\,u_{n+1} = 10 \times (10^{n+1} - 7) + 63$
$3\,u_{n+1} = 10^{n+2} - 70 + 63$ donc $3\,u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrons que pout tout n de N, $u_n = \underbrace{\overline{33\ldots31}}_{n \text{ fois}}$ en base 10, où 3 est écrit n fois

$\underbrace{\overline{33\ldots31}}_{n \text{ fois}} = 1 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + \ldots + 3 \times 10^n$ donc $\underbrace{\overline{33\ldots31}}_{n \text{ fois}} = 1 + 3 \times 10\,(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) = 1 + 3 \times 10 \times \dfrac{10^n - 1}{10 - 1}$

donc $3 \times \underbrace{\overline{33\ldots31}}_{n \text{ fois}} = 3 + 10 \times (10^n - 1) = 10^{n+1} - 10 + 3 = 10^{n+1} - 7 = 3\,u_n$ donc $u_n = \underbrace{\overline{33\ldots31}}_{n \text{ fois}}$

Pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n est $\underbrace{\overline{33\ldots31}}_{n \text{ fois}}$.

3.

Dividende	Diviseur	Quotient	reste
331	2	165	1
331	3	110	1
331	5	66	1
331	7	47	2
331	11	30	1
331	13	25	6
331	17	19	8

$u_2 = 331$ or $18^2 < 331 < 19^2$, pour montrer que u_2 est un nombre premier, il suffit de montrer qu'il n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 2 et 18 donc pas divisible par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17.
Aucun reste n'est nul donc u_2 n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 2 et 18
u_2 est un nombre premier.

4. Le chiffre des unités de u_n est 1 donc n'est divisible ni par 2, ni par 5.
$u_n = \underbrace{\overline{33\ldots31}}_{n \text{ fois}}$ donc $u_n \equiv 1$ (modulo 3) donc u_n n'est pas divisible par 3.

5. *a.* $10 = 11 - 1$ donc $10 \equiv -1$ (modulo 11) donc $3\,u_n \equiv (-1)^{n+1} - 7$ (modulo 11) or $-7 = 4 - 11$
donc $3\,u_n \equiv (-1)^{n+1} + 4$ (modulo 11) or $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$, donc pour tout entier naturel n, $3\,u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo11).

b. $(-1)^n \equiv 1$ (modulo 11) si n est pair ou $(-1)^n \equiv -1$ (modulo 11) si n est impair donc $3\,u_n \equiv 3$ (modulo 11) si n est pair ou si n est impair, $3\,u_n \equiv 5$ (modulo 11) donc $3\,u_n$ n'est jamais divisible par 11 donc pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. *a.* 17 est un nombre premier et 10 est un entier naturel non divisible par 17, alors $10^{17-1} \equiv 1$ (modulo 17)
soit $10^{16} \equiv 1$ (modulo17).

b. **3** $u_{16k+8} = 10^{16k+8+1} - 7$ donc $3\,u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7$
$10^{16} \equiv 1$(modulo17) donc $3\,u_{16k+8} \equiv 10^{10} - 7$ (modulo17).
$10^3 = 1000 = 17 \times 58 + 14 = 17 \times 59 - 3$ donc $10^3 \equiv -3$ (modulo17) donc $10^9 \equiv (-3)^3$ (modulo17).
$(-3)^3 = -27 = -2 \times 17 + 7$ donc $10^9 \equiv 7$ (modulo17) et $3\,u_{16k+8} \equiv 7 - 7$ (modulo17).
17 divise $3\,u_{16k+8}$ or 17 et 3 sont premiers entre eux donc 17 divise u_{16k+8}
Pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice 3 (5 points) Commun à tous les candidats
Partie A : Restitution organisée de connaissances

La dérivée de $u\,v$ est $u'\,v + v'\,u$ donc $u'\,v = (u\,v)' - v'\,u$ donc $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}\,x$

$u\,v$ est une fonction continue dérivable sur $[a\,;\,b]$; une primitive de $(u\,v)'$ est $u\,v$ donc :

$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}\,x = [\,u(x)\,v(x)\,]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Partie B

1. ***a.*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. f est définie continue dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme produit de fonctions continues dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$f'(x) = 2\,x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2\,x\ln x + x = x\,(2\ln x + 1)$

$2\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ d'où les variations de f :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘		↗	

2. La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse α a pour équation $y = f'(\alpha)\,(x - \alpha) + f(\alpha)$
Cette tangente passe par O si et seulement si $f'(\alpha)\,(-\alpha) + f(\alpha) = 0$ soit $-\alpha^2\,(2\ln\alpha + 1) + \alpha^2\,2\ln\alpha = 0$
soit $\alpha^2\,(1 - \ln\alpha) = 0$, or $\alpha \neq 0$ donc la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse α passe par O si et seulement si $1 - \ln\alpha = 0$ soit $\ln\alpha = 1$ soit $\alpha = \mathrm{e}$
Il existe une seule tangente à la courbe (C) passant par O.
$f'(\mathrm{e}) = 3\,\mathrm{e}$, cette tangente passe par O donc une équation de la tangente au point d'abscisse e est $y = 3\,\mathrm{e}\,x$.

3. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$.

On note V une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que : $V = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \pi\,[\,f(x)]^2\,\mathrm{d}\,x$.

a. Soit F la fonction $x \to \dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$, F est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{5\,x^4}{25}(5\ln x - 1) + \dfrac{5}{x} \times \dfrac{x^5}{25}$

$\mathrm{F}'(x) = \dfrac{x^4}{5}(5\ln x - 1) + \dfrac{x^4}{5} = x^4\ln x$ donc F est une primitive sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de la fonction $x \to x^4\ln x$.

b. $V = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \pi\,[x^2\ln x]^2\,\mathrm{d}\,x = \pi\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x^4\,(\ln x)^2\,\mathrm{d}\,x$

Soit $u'(x) = x^4$ alors $v(x) = \dfrac{x^5}{5}$

Soit $v(x) = (\ln x)^2$ alors $v'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x$ donc $\mathrm{V} = \pi\left(\,[\,u(x)\,v(x)\,]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} - \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}\,x\right)$

$$\mathrm{V} = \pi\left(\left[\frac{x^5}{5}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} - \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \frac{x^5}{5}\times\frac{2}{x}\ln x\,\mathrm{d}\,x\right) = \pi\left(\left[\frac{x^5}{5}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} - \frac{2}{5}\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x^4\ln x\,\mathrm{d}\,x\right)$$

en tenant compte que $\ln 1 = 0$ et $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$, $\mathrm{V} = \pi\left(-\dfrac{1}{5\,\mathrm{e}^5} - \dfrac{2}{5}\left[\dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1)\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\right)$

soit $\mathrm{V} = \pi\left(-\dfrac{1}{5\,\mathrm{e}^5} - \dfrac{2}{5}\left[-\dfrac{1}{25} + \dfrac{6}{25\,\mathrm{e}^5}\right]\right) = \pi\left(-\dfrac{25}{125\,\mathrm{e}^5} + \dfrac{2}{125} - \dfrac{12}{125\,\mathrm{e}^5}\right) = \pi\left(\dfrac{2}{125} - \dfrac{37}{125\,\mathrm{e}^5}\right)$

$\mathrm{V} = \dfrac{\pi}{125}\left(2 - \dfrac{37}{\mathrm{e}^5}\right)$.

Exercice 4 (5 points) Commun à tous les candidats.
Partie A

1. D a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0) et F (1 ; 1 ; 1) dans le repère orthonormal $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$. K est le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2) donc les coordonnées de K sont égales à $\left(\frac{x_D + x_F}{1+2} ; \frac{y_D + y_F}{1+2} ; \frac{z_D + z_F}{1+2}\right)$ soit $\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

2. E a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1) dans le repère orthonormal $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ donc $\overrightarrow{EK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1) donc $\overrightarrow{EK} . \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$ donc les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3. $EK^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9}$ .donc $EK = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Partie B

1. La hauteur issue de D du tétraèdre E*M*FD, est DH = 1

La hauteur issue de M du triangle EFM est égale à 1 donc l'aire du triangle EFM est $A_{EFM} = \frac{1}{2} \times 1 \times EF = \frac{1}{2}$

Le volume du tétraèdre E*M*FD, est égal à $\frac{1}{3} \times DH \times A_{EFM} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0 ; 1], le volume du tétraèdre E*M*FD, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2. $\overrightarrow{HM} = m\ \overrightarrow{HG} = m\ \overrightarrow{DC}$ donc M a pour coordonnées (0 ; m ; 1)

Soit P le plan d'équation $(-1 + m)\, x + y - m\, z = 0$.

D a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0) donc D $\in$ P

F a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1) or $(-1 + m) + 1 - m = 0$ donc F $\in$ P

M a pour coordonnées (0 ; m ; 1) or $(-1 + m) \times 0 + m - m = 0$ donc $M \in$ P

Les point M, F, D ne sont pas alignés donc définissent un plan dont une équation cartésienne est $(-1 + m)\, x + y - m\, z = 0$.

3. *a.* pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0 ; 1], $d_m = \frac{|(-1+m)+0-m|}{\sqrt{(-1+m)^2+1^2+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

b. la distance d_m est maximale quand $2m^2 - 2m + 2$ est minimal donc quand $m^2 - m + 1$ est minimal

$m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ donc $m^2 - m + 1$ est minimal pour $m = \frac{1}{2}$ donc quand M est le milieu de [HG].

c. lorsque la distance d_m est maximale, $m = 0{,}5$ et le plan (*M*FD) a pour équation $-0{,}5\, x + y - 0{,}5\, z = 0$ soit $x - 2y + z = 0$

Un vecteur normal au plan (*M*FD) est $\vec{n}\,(1 ; -2 ; 1)$ or $\overrightarrow{EK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{3}\vec{n}$ donc la droite (EK) est la perpendiculaire en E au plan (*M*FD). K est le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2) donc K $\in$ (DF) donc K est un point du plan (*M*FD) donc le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (*M*FD).