Amérique du Sud décembre 2002

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et – 2.

À tout point M d'affixe z, z différent de 2, on associe le point N d'affixe $\bar{z}$ et M′ d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{2z-4}{\bar{z}-2}$.

1. Calculer z' et $|z'|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + i$.

2. *a.* Interpréter géométriquement $|z - 2|$ et $|\bar{z} - 2|$.

b. Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de M′.

3. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z ($z \neq 2$) tels que M′ = B.

4. On note $Z_{\overrightarrow{AM}}$ et $Z_{\overrightarrow{BM'}}$, les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.

Montrer que, pour tout point M distinct de A et n'appartenant pas E , le quotient $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AM}}}{Z_{\overrightarrow{BM'}}}$ est un nombre réel.

Interpréter géométriquement ce résultat.

5. Un point M distinct de A, n'appartenant pas E , étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M′. On illustrera par une figure.

CORRECTION

1. Si $z = 5$, $z' = \dfrac{2\times 5-4}{5-2} = 2$ donc $|z'| = 2$

Si $z = 1 + i$, $z' = \dfrac{2\times(1+i)-4}{(1+i)-2} = \dfrac{2\times(-1+i)}{-1+i} = 2$ donc $|z'| = 2$

2. *a*. $|z - 2| = AM$ et $|\bar{z} - 2| = AN$

2. *b*. $|z'| = \left|\dfrac{2\times(z-2)}{\bar{z}-2}\right| = \dfrac{2|z-2|}{|\bar{z}-2|}$ or $|\bar{z}-2| = |z - 2|$ donc $|z'| = 2$ donc OM' = 2 donc M' appartient au cercle de centre O de rayon 2.

3. M' = B $\Leftrightarrow 2(z-2) = -2(\bar{z}-2)$ et $z \neq 2$

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels

M' = B $\Leftrightarrow x - 2 + iy = -x + 2 + iy$ et $z \neq 2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$ et $z \neq 2 \Leftrightarrow x = 2$ et M $\neq$ A

E est donc la droite d'équation $x = 2$, privée du point A

4. $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AM}}}{Z_{\overrightarrow{BM'}}} = \dfrac{z-2}{z'+2}$ or $z' + 2 = \dfrac{2z+2\bar{z}-8}{\bar{z}-2}$ donc $\dfrac{z-2}{z'+2} = \dfrac{(z-2)(\bar{z}+2)}{2(z+\bar{z})-8}$

or si $z = x + iy$ avec x et y réels alors $z + \bar{z} = 2x$ donc $\dfrac{(z-2)(\bar{z}+2)}{2(z+\bar{z})-8} = \dfrac{|z-2|^2}{4x-8}$ donc $\dfrac{z-2}{z'+2}$ est un réel.

donc $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AM}}}{Z_{\overrightarrow{BM'}}} = k$ ($k \in \mathbb{R}$) donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM'}$ donc les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

5. M' appartient au cercle de centre O de rayon 2 et (AM) et (BM') sont parallèles

M $\notin$ E donc M' $\neq$ B donc M' est le point différent de B, intersection cercle de centre O de rayon 2 et de la parallèle en B à (AM).