Amérique du Nord juin 2018

EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée E(X), est égale à : $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x 0,2\, t\, e^{-0,2\, t}\, dt$

Le but de cette partie est de démontrer que E(X) = 5.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 0,2\, t\, e^{-0,2\, t}$.

On définit la fonction G sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $G(t) = (-t-5)\, e^{-0,2\, t}$.

Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. En déduire que la valeur exacte de E(X) est 5.

Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant : $\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-0,2\, x} = 0$.

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.

Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ. Grâce à cette étude, on estime que $P(T < 10) = 0,067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.

2. Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2 min^{-1}.

a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :

- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
- parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les événements suivants :

B : « le client paye à une borne automatique » ;

$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.

Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.

Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?

2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

EXERCICE 2 **(4 points)** **Commun à tous les candidats**

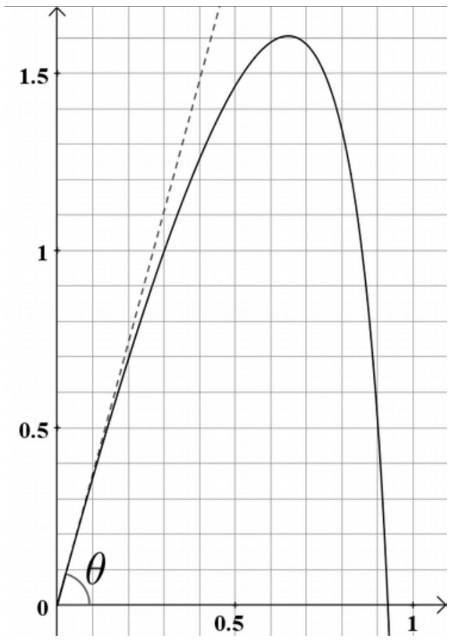
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1\,[$ par :

$$f(x) = b\,x + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1[$. On note f' sa fonction dérivée.

On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1[$:

$$f'(x) = \frac{-b\,x + b - 2}{1-x}.$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5{,}69$.

L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

EXERCICE 3 **(5 points)** **Commun à tous les candidats**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.

On considère les points B(10 ; – 8 ; 2), C(– 1 ; – 8 ; 5) et D(14 ; 4 ; 8).

1.*a.* Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

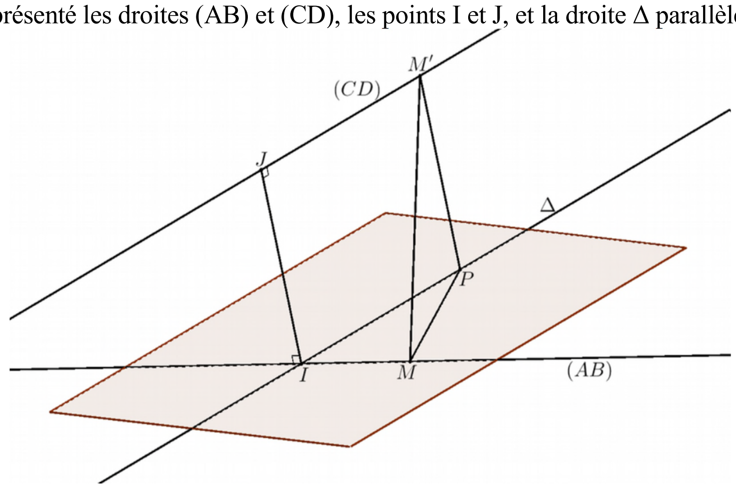
2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD). La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

Sur le schéma ci-dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.



On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.

On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.

a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

b. Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

c. Justifier que MM' > IJ et conclure.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux graphiques donnés en annexe seront à compléter et à rendre avec la copie.

Un scooter radiocommandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de 1 $m.s^{-1}$. Il est poursuivi par un chien qui se déplace à la même vitesse. On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation $x = 5$. Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.

Dans la suite de l'exercice, on étudie deux modélisations différentes de la trajectoire du chien.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

À l'instant initial, le scooter est représenté par le point S_0. Le chien qui le poursuit est représenté par le point M_0. On considère qu'à chaque seconde, le chien s'oriente instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre.

Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point S_0, et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point M_1.

À cet instant, le scooter est au point S_1. Le chien s'oriente en direction de S_1 et se déplace en ligne droite en parcourant 1 mètre, et ainsi de suite.

On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées (M_n) et (S_n).

Au bout de n secondes, les coordonnées du point S_n sont $(5 ; n)$. On note $(x_n ; y_n)$ les coordonnées du point M_n.

1. Construire sur le graphique $n°$ 1 donné en annexe les points M_2 et M_3.

2. On note d_n la distance entre le chien et le scooter n secondes après le début de la poursuite. On a donc $d_n = M_nS_n$.

Calculer d_0 et d_1.

3. Justifier que le point M_2 a pour coordonnées $\left(1+\dfrac{4}{\sqrt{17}} ; \dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{5-x_n}{d_n} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{n-y_n}{d_n} \end{cases}$

a. Le tableau ci-dessous, obtenu à l'aide d'un tableur, donne les coordonnées des points M_n et S_n ainsi que la distance d_n en fonction de n. Quelles formules doit-on écrire dans les cellules C5 et F5 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	M_n		S_n		d_n
2		x_n	y_n	5	n	
3	0	0	0	5	0	5
4	1	1	0	5	1	4,12310563
5	2	1,9701425	0,24253563	5	2	3,50267291
6	3	2,83515547	0,74428512	5	3	3,12646789
7	4	3,52758047	1,46577498	5	4	2,93092404
...	...	...	...	...	...	...
28	24	4,99979751	21,2268342	5	24	2,7731658
29	25	4,99987053	22,2268342	5	25	2,7731658

b. On admet que la suite (d_n) est strictement décroissante.

Justifier que cette suite est convergente et conjecturer sa limite à l'aide du tableau.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

On modélise maintenant la trajectoire du chien à l'aide de la courbe T de la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 5[$ par :

$$f(x) = -2,5 \ln(1-0,2x) - 0,5x + 0,05x^2.$$

Cela signifie que le chien se déplace sur la courbe T de la fonction f.

1. Lorsque le chien se trouve au point M de coordonnées $x ; f(x)$ de la courbe T, où x appartient à l'intervalle $[0 ; 5[$, le scooter se trouve au point S, d'ordonnée notée y_S. Ainsi le point S a pour coordonnées $(5 ; y_S)$. La tangente à la courbe T au point M passe par le point S. Cela traduit le fait que le chien s'oriente toujours en direction du scooter. On note $d(x)$ la distance MS entre le chien et le scooter lorsque M a pour abscisse x.

a. Sur le graphique $n°$ 2 donné en annexe, construire, sans calcul, le point S donnant la position du scooter lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe T et lire les coordonnées du point S.

b. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 5[$ et on admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 5[$:

$$f'(x) = \frac{x(1-0,1x)}{5-x}$$

Déterminer par le calcul une valeur approchée au centième de l'ordonnée du point S lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe T.

2. On admet que $d(x) = 0,1x^2 - x + 5$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 5[$.

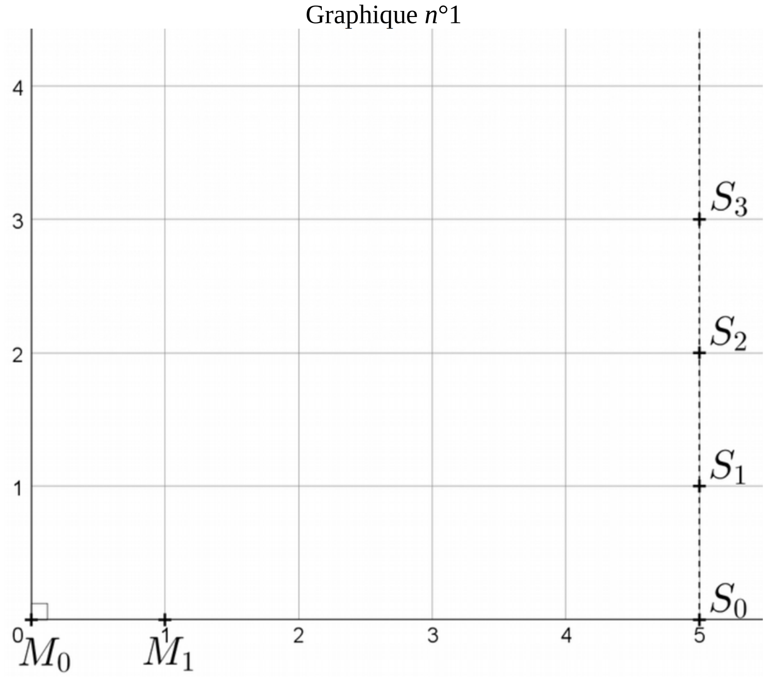
Justifier qu'au cours du temps la distance MS se rapproche d'une valeur limite que l'on déterminera.

EXERCICE 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

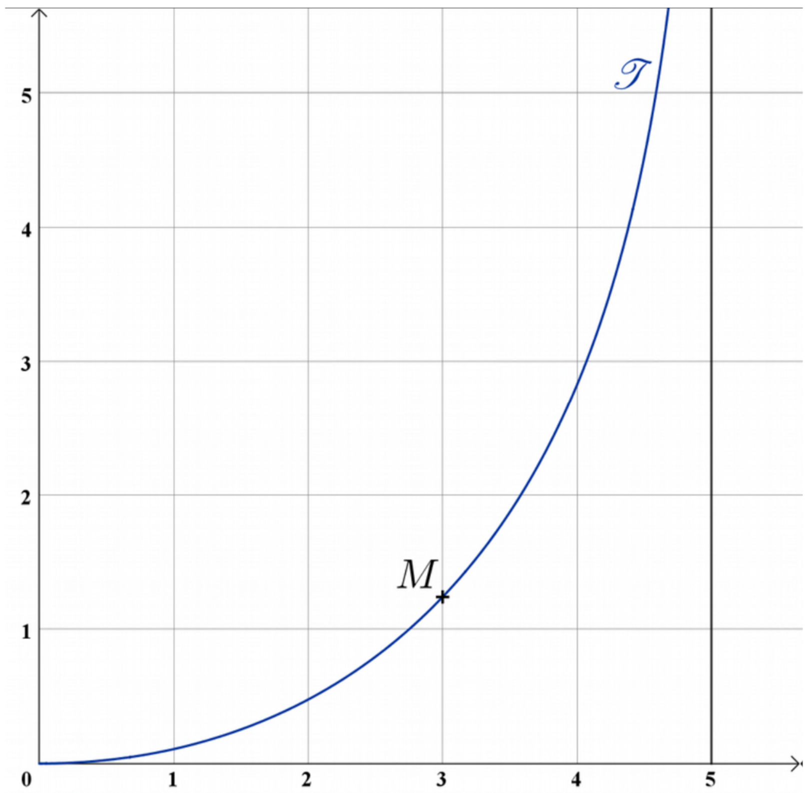
Partie A, question 1

Graphique *n*°1



Partie B, question 1

Graphique *n*°2



EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.

Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1er juillet de l'année 2012 + n.

Partie A - Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}1\, u_n - 2000\, v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-5}\, u_n + 0{,}6\, v_n \end{cases}$$ pour tout entier $n \geq 0$, avec $u_0 = 2000000$ et $v_0 = 120$.

1. *a.* On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 0$.

Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.

b. Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{15\,000} \times \begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

On admet que, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_n = \dfrac{2{,}8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0{,}7^n}{15} \\ v_n = \dfrac{1400 + 400 \times 0{,}7^n}{15} \end{cases}$

Décrire l'évolution des deux populations.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent. On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}1\, u_n - 0{,}001\, u_n \times v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-7} u_n \times v_n + 0{,}6\, v_n \end{cases}$$ pour tout entier $n \geq 0$,

avec $u_0 = 2\,000\,000$ et $v_0 = 120$.

Le tableau ci-dessous présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité

Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?

Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

	A	B	C
1	Modèle de la partie B		
2	n	u_n	v_n
3	0	2 000 000	120
4	1	1960 000	120
5	2	1920 800	119
6	3	1884 228	117
7	4	1851905	114
8	5	1825160	111
9	6	1804 988	107
10	7	1792 049	103
11	8	1786 692	99
12	9	1789 005	94
13	10	1798 854	91
14	11	1815 930	87
15	12	1839 780	84
16	13	1869 827	81
17	14	1905 378	79
18	15	1945 622	77
19	16	1989 620	77
20	17	2 036 288	76
21	18	2 084 374	77
22	19	2132 440	78
23	20	2178 846	80
24	21	2221746	83
25	22	2259109	87
26	23	2 288 766	91
27	24	2 308 508	97

Partie C

Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.

Est-il possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$? (On parle alors d'état stable.)

CORRECTION

EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A - Démonstration préliminaire

1. Soit $\begin{cases} u(t) = -t-5 & u'(x) = -1 \\ v(x) = e^{-0,2t} & v'(x) = -0,2\, e^{-0,2t} \end{cases}$ alors G'(t) = $-\ e^{-0,2t} + (-t-5)(-0,2\ e^{-0,2t})$

G'(t) = $[-1 + 0,2\,t + 1]\,e^{-0,2t} = 0,2\,t\ e^{-0,2t}$ donc G'(t) = g(t) donc G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. $\int_0^x 0,2\,t\,e^{-0,2t}\,dt = G(x) - G(0) = (-x-5)\,e^{-0,2x} + 5$

$\int_0^x 0,2\,t\,e^{-0,2t}\,dt = -x\,e^{-0,2x} - 5\,e^{-0,2x} + 5$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-0,2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x 0,2\,t\,e^{-0,2t}\,dt = 5$

La valeur exacte de E(X) est 5.

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

1. Soit Z = $\dfrac{T-40}{\sigma}$, Z suit une loi normale centrée réduite et $P\left(Z < \dfrac{10-40}{\sigma}\right) = 0,067$ donc $\dfrac{-30}{\sigma} \approx -1,4985$ donc $\sigma \approx \dfrac{30}{1,4985}$

$\sigma \approx 20,0198$ min soit 20 minutes et 1 seconde ($0,0198 \times 60 = 1,188$)

2. P(T > 60) = 0,159 (à la calculette) donc environ 15,9 % des clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

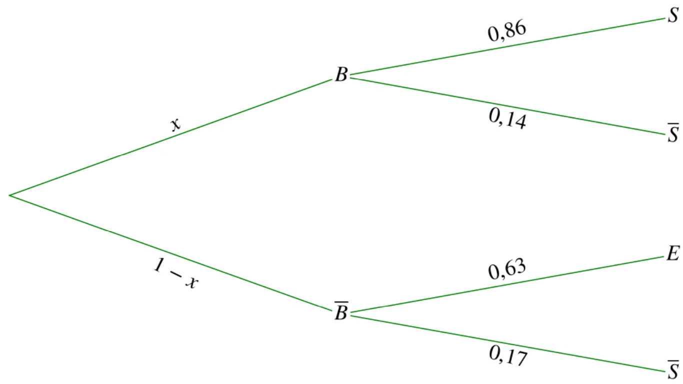
Partie C - Durée d'attente pour le paiement

1. *a.* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors E(X) = $\dfrac{1}{\lambda}$ donc la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement est de $\dfrac{1}{0,2}$ soit 5 minutes.

b. $P(X > 10) = e^{-10\lambda} = e^{-2} \approx 0,135$

2. P(S) = 0,86 x + 0,63 (1 – x) = 0,63 – 0,23

P(S) > 0,75 $\Leftrightarrow$ 0,63 + 0,23 x > 0,75 $\Leftrightarrow$ 0,23 x > 0,12 $\Leftrightarrow$ $x > \dfrac{12}{23}$



La proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint est $\dfrac{12}{23}$ soit environ 52 %

Partie D - Bons d'achat

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 € donc obtient 15 cartes.
On a une succession de 15 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- succès : le client obtient une carte gagnante (p = 0,005)
- échec : le client n'obtient pas une carte gagnante (q = 1 – p = 0,995)

donc la variable aléatoire J qui est égale au nombre de succès au cours de ces n = 15 épreuves, suit une loi binomiale de paramètres (15 ; 0,005).
$P(J \geq 1) = 1 - P(J = 0) \approx 1 - 0,995^{15} \approx 0,07$

2. Soit n le nombre de cartes obtenues, pour les mêmes raisons que précédemment, la variable aléatoire G qui est égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves, suit une loi binomiale de paramètres (n ; 0,005).

$P(G \geq 1) \geq 0,5 \Leftrightarrow 1 - P(G = 0) \geq 0,5 \Leftrightarrow P(G = 0) \leq 0,5 \Leftrightarrow 0,005^n \leq 0,5 \Leftrightarrow n \ln 0,005 \leq \ln 0,5 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,005} \Leftrightarrow n \geq 139$

$\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,005} \approx 138,3$ donc le premier nombre entier supérieur à $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,005}$ est 139

EXERCICE 2 **(4 points)** **Commun à tous les candidats**

1. f possède un maximum sur l'intervalle ouvert] 0 ; 1 [et donc, ce maximum est atteint pour un zéro de la dérivée. Or on a pour x de [0 ; 1[et $b \geq 2$, $f'(x) = \dfrac{-b\,x + b - 2}{1 - x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{b-2}{b}$, $\dfrac{b-2}{b} = 1 - \dfrac{2}{b}$, il faut vérifier que ce nombre appartient bien à l'ensemble de définition.

$b \geq 2$ donc $0 < \dfrac{2}{b} \leq 1$ donc $0 \leq 1 - \dfrac{2}{b} < 1$ donc $1 - \dfrac{2}{b} \in [0 ; 1[$.

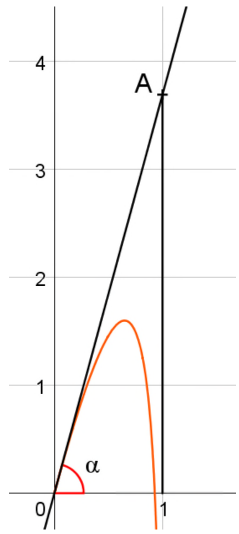
$x = \dfrac{b-2}{b} \Leftrightarrow 1 - x = \dfrac{2}{b}$ donc $f\left(\dfrac{b-2}{b}\right) = b\left(\dfrac{b-2}{b}\right) + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$ donc $f\left(\dfrac{b-2}{b}\right) = b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

Le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Il faut chercher à résoudre : $b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right) \leq 1{,}6$ soit $x - 2 + 2\ln 2 - 2\ln b \leq 1{,}6$

Soit la fonction définie sur $[2 ; +\infty[$ par $g(x) = x - 2 + 2\ln 2 - 2\ln x$

$g'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$ donc si $x \geq 2$, $g'(x) \geq 0$, g est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.



$g(2) = 0$

$g(x) = x\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) - 2 + 2\ln 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

g est définie, continue, strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$, $g(2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $1{,}6 \in [0 ; +\infty[$ donc il existe une valeur $\alpha \in [2 ; +\infty[$ telle que $g(\alpha) = 1{,}6$.

$g(5{,}69) \approx 1{,}59887 < 1{,}6$ et $g(5{,}7) \approx 1{,}605 > 1{,}6$, donc $5{,}69 < \alpha < 5{,}7$; on choisit $\alpha \approx 5{,}69$.

La hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre quand b appartient à l'intervalle $[2 ; \alpha]$.

3. $f'(x) = \dfrac{-5{,}69\,x + 3{,}69}{1 - x}$. La tangente au point d'abscisse 0 à la courbe a pour coefficient directeur $f'(0) = 3{,}69$ et pour équation $y = 3{,}69\,x$

A est le point de la tangente d'abscisse 1 donc a pour coordonnées (1 ; 3,69)

L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est tel que $\tan\theta = \dfrac{y_A}{x_A}$ donc $\tan\theta = 3{,}69$ donc $\theta \approx 74{,}8°$

EXERCICE 3 **(5 points)** **Commun à tous les candidats**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.

On considère les points B(10 ; – 8 ; 2), C(– 1 ; – 8 ; 5) et D(14 ; 4 ; 8).

1.*a.* $\overrightarrow{AB}$ (10 ; – 8 ; 2) donc $\vec{u}$ (5 ; – 4 ; 1) est un vecteur directeur de (AB), donc un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5t \\ y = -4t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{CD}$ (15 ; 12 ; 3) donc $\vec{v}$ (5 ; 4 ; 1) est un vecteur directeur de (CD) donc un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est $\begin{cases} x = 5k - 1 \\ y = 4k - 8 \\ z = k + 5 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

b. $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Cherchons si (AB) et (CD) sont sécantes, $\begin{cases} 5t = 5k - 1 \\ -4t = 4k - 8 \\ t = k + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k - \dfrac{1}{5} \\ -4t = 4k - 8 \\ t = k + 5 \end{cases}$

Les conditions 1 et 3 sont incompatibles donc (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.
Elles sont non coplanaires.

2. *a.* $\begin{cases} x = 5t = 5 \\ y = -4t \\ z = t \end{cases}$ donc t = 1, I a pour coordonnées (5 ; – 4 ; 1)

$\begin{cases} x = 5k - 1 = 4 \\ y = 4k - 8 \\ z = k + 5 \end{cases}$ donc k = 1, J a pour coordonnées (4 ; – 4 ; 6).

$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées (– 1 ; 0 ; 5) donc $IJ^2 = 1^2 + 0^2 + 5^2 = 26$ soit IJ = $\sqrt{26}$

b. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 10 + 0 \times (-8) + 5 \times 2 = 0$

$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = -1 \times 15 + 0 \times 12 + 5 \times 3 = 0$

La droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

3. *a.* M’ n’appartient pas à (IJ) donc M’, I, J définissent un plan.
La droite Δ est parallèle à (CD) et passe par le point I, elle est donc incluse dans le plan (IJM’).

Dans le plan (IJM’), la droite Δ est perpendiculaire à (IJ) et donc aussi à la parallèle à (IJ) passant par M’.

Conclusion : la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M′ coupe la droite Δ en un point noté P.

b. Les droites (IJ) et (M’P) sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$ sont colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{M'P}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Or la droite Δ (de vecteur directeur $\overrightarrow{IP}$) est parallèle à (CD) donc les vecteurs $\overrightarrow{M'P}$ et $\overrightarrow{IP}$ sont orthogonaux.

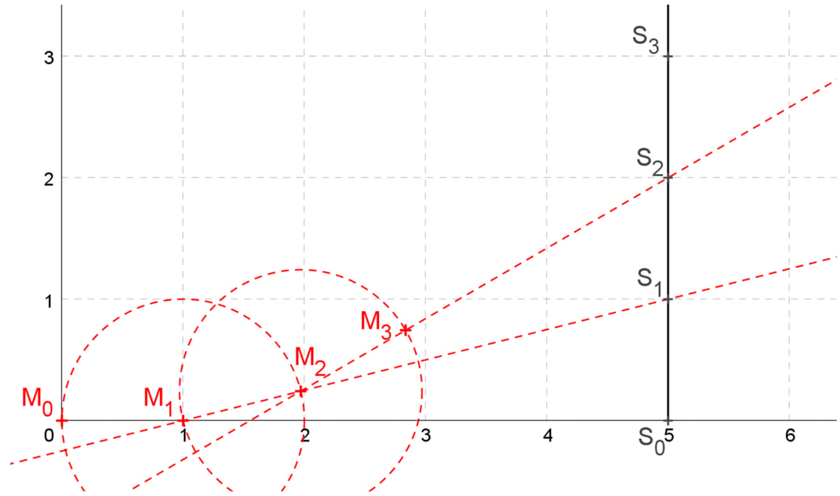
$\overrightarrow{M'P}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IMP), donc à tout vecteur de ce plan et en particulier à $\overrightarrow{MP}$ donc le triangle MPM′ est rectangle en P.

3. *c.* Le triangle MPM′ est rectangle en P donc MM’ est l’hypoténuse de ce triangle.
Dans un triangle rectangle, la longueur de l’hypoténuse est supérieure à celles des côtés de l’angle droit donc MM’ > M’P.
or M’ P = I J donc MM’ > IJ donc la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

EXERCICE 4 **(5 points)** **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

1.



2. $M_0\,(0\,;\,0)$ et $M_1\,(1\,;\,0)$
donc $d_0 = M_0S_0 = 5$ et
$d_1 = \sqrt{(5-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{17}$.

3. M_2 appartient à la droite (M_1S_1) donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = k\,\overrightarrow{M_1S_1}$ de plus $M_1M_2 = 1$ donc $|k|\,M_1S_1 = 1$

or $M_1S_1 = d_1 = \sqrt{17}$ donc $|k| = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1S_1}$ sont colinéaires de même sens donc $k \geq 0$, donc $k = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = k\,\overrightarrow{M_1S_1}$ donc en posant $(x\,;\,y)$ coordonnées de M_2 : $\begin{cases} x-1=\dfrac{1}{\sqrt{17}}\times 4 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{17}}\times 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=1+\dfrac{4}{\sqrt{17}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

donc le point M_2 a pour coordonnées $\left(1+\dfrac{4}{\sqrt{17}}\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\dfrac{5-x_n}{d_n} \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{n-y_n}{d_n} \end{cases}$

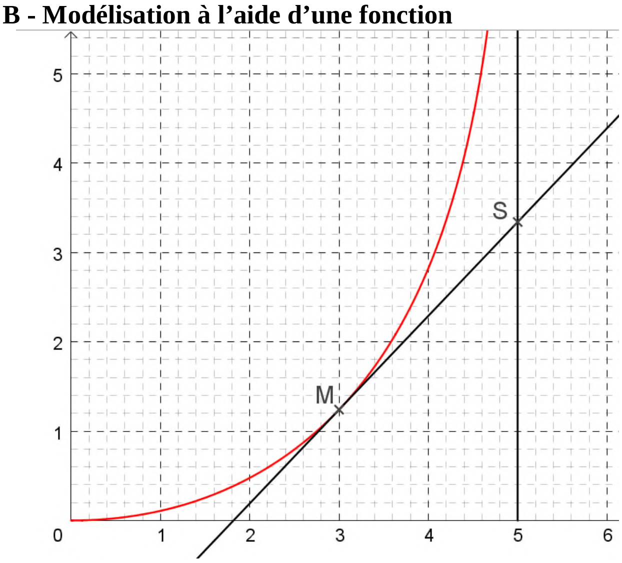
a. On doit-on écrire dans la cellule C5 : $\boxed{\text{= C4 + (A4 – C4) / F4}}$

On doit-on écrire dans la cellule F5 : $\boxed{\text{= RACINE((B5 – D5)\^{}2 + (C5 – E5)\^{}2)}}$ et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F.

b. La suite (d_n) est strictement décroissante, minorée par 0 (une distance est toujours positive) donc cette suite est convergente.
D'après le tableau, on peut conjecturer que la limite de (d_n) est 2,773 165 8.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

1. *a.*



Graphiquement : S a pour coordonnées (5 ; 3,3)

1. *b.* $f(3) = -2{,}5\ln 0{,}4 - 1{,}95$ et $f'(3) = \dfrac{3\times(1-0{,}3)}{5-3} = 1{,}05$

La tangente au point M d'abscisse 3 a pour équation :
$y = f'(3)\,(x-3) + f(3)$ soit $y = 1{,}05\,x - 2{,}5\ln(0{,}4) - 4{,}2$.
Le point d'abscisse 5 de cette droite a pour ordonnée :
$y = 5{,}25 - 2{,}5\ln(0{,}4) - 4{,}2$
soit $y = 1{,}05 - 2{,}5\ln(0{,}4)$ (valeur exacte)
ou 3,34 valeur approchée au centième de l'ordonnée du point S lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe T.

2. $d(x) = 0{,}1\,x^2 - x + 5$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,5[$.
d est un polynôme donc $\lim\limits_{x\to 5} d(x) = d(5) = 2{,}5$

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A - Un modèle simple

1. *a.* $\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}1\, u_n - 2000\, v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-5}\, u_n + 0{,}6\, v_n \end{cases}$ donc A = $\begin{pmatrix} 1{,}1 & -2000 \\ 2\times 10^{-5} & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 2\times 10^6 \\ 120 \end{pmatrix}$

b. 2018 = 2012 + 6 donc le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018 est donné par U_6.

$U_6 = A^6 \begin{pmatrix} 2\times 10^6 \\ 120 \end{pmatrix}$ donc $u_6 \approx 1\,882\,353$ campagnols et $v_6 \approx 96$ renards

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

Initialisation : $P \times D^0 \times P^{-1} \times U_0 = P \times I_2 \times P^{-1} \times U_0 = P \times P^{-1} \times U_0 = U_0$ où I_2 est la matrice identité.

Hérédité : montrons pour tout naturel n, que si $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$, alors $U_{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1} \times U_0$

$U_{n+1} = A\, U_n = P \times D \times P^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$ or $P \times P^{-1} = I_2$ donc $U_{n+1} = P \times D \times D^n \times P^{-1} \times U_0$

soit $U_{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1} \times U_0$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_n = \dfrac{2{,}8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0{,}7^n}{15} \\ v_n = \dfrac{1400 + 400\times 0{,}7^n}{15} \end{cases}$

$-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2{,}8\times 10^7}{15}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1400}{15}$

La population de campagnols tend environ vers 1 866 667 et celle de renards environ vers 93.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

On doit-on écrire dans la cellule B4 : = 1.1*B3 - 0.001*B3*C3

On doit-on écrire dans la cellule C4 : = 2*10^(-7)*B3*C3 + 0.6*C3 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C.

2021 = 2012 + 9 donc à partir de 2021, on constate la baisse du nombre de renards et la hausse du nombre de campagnols.

Partie C

$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow 0{,}1\, u_n - 0{,}001 u_n \times v_n = 0 \Leftrightarrow u_n (0{,}1 - 0{,}001 v_n) = 0 \Leftrightarrow u_n = 0$ ou $v_n = 100$.

$v_{n+1} = v_n \Leftrightarrow 2\times 10^{-7}\, u_n v_n + 0{,}6\, v_n = v_n \Leftrightarrow 2\times 10^{-7}\, u_n v_n - 0{,}4\, v_n = 0 \Leftrightarrow 0{,}2\, v_n (10^{-6}\, u_n - 2) = 0 \Leftrightarrow v_n = 0$ ou $u_n = 2\,000\,000$

En supposant qu'au départ, les deux espèces étaient présentes, il faut donc que $u_0 = 2\,000\,000$ et $v_0 = 100$ pour avoir un état stable, soit deux millions de campagnols et 100 renards.