Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct .
On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i) z - i$.

1 : Montrer que T est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques.

On notera A le point invariant de T. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'})$, en supposant que M ≠ A.

2 : *a*) Construire M' pour un point M donné.

b) Déterminer l'image de D' par T de la droite D d'équation $y = x$. Construire D'.

3 : *a*) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' = T(B) soient liées par la relation $z_0 z'_0 = 1$. Mettre en place B et B'.

b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A' , B et B' sont cocycliques.

CORRECTION

1 : L'application T est la similitude directe de rapport :

$| 1 + i | = \sqrt{2}$ d'angle $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}$ et de centre le point A d'affixe z_1 solution de l'équation $z = (1 + i) z - i$. C'est donc le point d'affixe $z_1 = 1$.

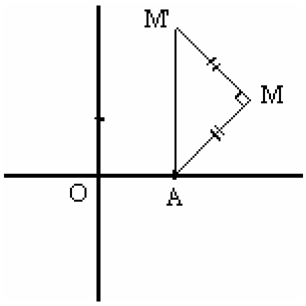
Si M est un point du plan distinct de A, d'affixe z, et si M' = T(M) est d'affixe z', on a :

$z' = (1 + i) z - i$ d'où $z' - z = i(z - 1)$ ou encore : $\frac{z' - z}{z - 1} = i$.

On en déduit qu'un argument de ce nombre complexe est :

$\arg\left(\frac{z' - z}{z - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Donc une mesure de l'angle demandé est $\frac{\pi}{2}$.



2 : *a*) On peut voir que la relation $z' - z = i(z - i)$ implique aussi que le triangle AMM' est rectangle en M isocèle et direct.
D'où le construction de M' à partir de M.

b) L'image de D par T est une droite D'.
Comme O et C d'affixe $1 + i$ sont sur D, il suffit de connaître les images de O et C par T pour connaître D'.
Or, T(O) a pour affixe $-i$ et T(C) a pour affixe i (simple calcul)
On en déduit que D' = T(D) est la droite des ordonnées.

3: *a*) Il est demandé de déterminer l'ensemble des points M tels que $z z' = 1$.
Ceci conduit à l'équation, en reprenant la définition liant z' à z :
$z [(1 + i) z - i] = 1$ ou encore $z^2 (1 + i) - i z - 1 = 0$ ou encore $(z - 1) [z (1 + i) + 1] = 0$.
Le point cherché B doit être distinct de A donc son affixe est distincte de 1.

On a donc: $z (1 + i) + 1 = 0$ ce qui donne : $z = \frac{-1}{1 + i} = \frac{i - 1}{2}$.

D'où l'existence et l'unicité du point B.

Le point B a donc pour affixe $\frac{i - 1}{2}$ et B' = T(B) pour affixe $-(1 + i)$.

b) C'est un application de la question 2 :
Le triangle ABB' est rectangle en B.
Comme A' a pour cordonnées (– 1 ; 0), on remarque que AA'B' est rectangle en A'.
Les points A, A' , B et B' sont donc sur le cercle de diamètre [AB'].