PONDICHERY AVRIL 2008

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année. Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E) ; y' = \frac{1}{20} y(10 - y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $(E_1) : z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$.

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{10}{9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

CORRECTION

1. *a.* y est une fonction dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ donc z est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $z' = -\frac{y'}{y^2}$.

z est solution de l'équation différentielle : $(E_1) \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20} \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{20} \Leftrightarrow -y' = \left(-\frac{1}{2y} + \frac{1}{20}\right)y^2$

$\Leftrightarrow -y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{20}y^2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{20}y^2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{20}(10y - y^2) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{20}y(10 - y) \Leftrightarrow$ y est solution de (E)

b. $(E_1) : z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$

Une fonction constante g solution de (E_1) vérifie $g' = 0$ et $g' = -\frac{1}{2}g + \frac{1}{20}$ donc $\frac{1}{2}g = \frac{1}{20}$ soit $g = \frac{1}{10}$

Les solutions de $z' = -\frac{1}{2}z$ sont les fonctions de la forme $k\,e^{-\frac{1}{2}x}$ où k est un nombre réel.

Les solutions de (E_1) sont les fonction de la forme $f(x) = 0,1 + k\,e^{-x}$ où k est un nombre réel.

y est solution de (E) $\Leftrightarrow$ z est solution de l'équation différentielle : $(E_1) : z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20} \Leftrightarrow z = 0,1 + k\,e^{-x}$

or $z = \frac{1}{y}$ soit y est solution de (E) $\Leftrightarrow \frac{1}{y} = 0,1 + k\,e^{-x} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{k\,e^{-\frac{1}{2}x} + 0,1}$ où k est un nombre réel.

2. g est solution de (E) donc de la forme $\dfrac{1}{k\,e^{-\frac{1}{2}x} + 0,1}$

$g(0) = 1$ soit $\frac{1}{k + 0,1} = 1 \Leftrightarrow 1 = k + 0,1 \Leftrightarrow k = 0,9$ donc $g(x) = \dfrac{1}{0,9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 0,1} = \dfrac{10}{9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$

3. $g(x) = \dfrac{10}{9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$ donc $g'(x) = \dfrac{-10 \times 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} = \dfrac{45\,e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2}$

La fonction exponentielle est strictement positive donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$
g est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10}{9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1} = 10$

Le nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat sera croissant et sera au plus de 10 millions.

5. La fonction g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $g(4) < 5$ et $g(5) > 5$ donc il faudra attendre 5 années pour que le nombre de foyers possédant un tel équipement dépasse 5 millions.
En 2010 le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera 5 millions.