Amérique du Sud novembre 2016

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}. On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique.

Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geq 48) = 0{,}7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.

3. Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $P(0 \leq T \leq 24) = 0{,}03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.

3. *a.* Démontrer que, pour tous réels *t* et *h* positifs, on a : $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.

b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois.

Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geq 48)$ et $(T \geq 48)$ sont indépendants.

Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.

Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $P(D \geq 48) = 0{,}7977$? Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

1. Soit $T = \dfrac{X - 50}{\sigma}$, T suit une loi normale centrée réduite et $P(D \geq 48) = P\left(T \geq \dfrac{48 - 50}{\sigma}\right) = 0{,}7977$.

soit $P\left(T \geq \dfrac{-2}{\sigma}\right) = 0{,}7977$. Avec l'aide de la calculette : $\dfrac{-2}{\sigma} = -0{,}83343$ soit $\sigma = \dfrac{2}{0{,}83343}$ donc $\sigma \approx 2{,}3997$

2. $P(45 \leq X \leq 52) = 0{,}7791$

3. Si le modèle fonctionne depuis 48 mois, sa durée de fonctionnement est supérieure à 48

S'il fonctionne 6 mois de plus ; sa durée de fonctionnement est supérieure à 48 + 6 = 54

$$P_{(X \geq 48)}(X \geq 54) = \frac{P\big((X \geq 48) \cap (X \geq 54)\big)}{P(X \geq 48)} = \frac{P(X \geq 54)}{P(X \geq 48)} = \frac{0{,}0478}{0{,}7977} \text{ soit } 0{,}0599$$

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Formulaire : Une loi exponentielle de paramètre λ est définie sur $[0\,;+\infty[$

Elle a pour fonction densité : $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$

$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $\quad$ $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ $\quad$ $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

1. $P(0 \leq T \leq 24) = P(T \leq 24) = 1 - e^{-24\lambda} = 0{,}03$ soit $e^{-24\lambda} = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$ donc $-24\lambda = \ln 0{,}97$ soit $\lambda = -\dfrac{\ln 0{,}97}{24}$

$\lambda \approx 0{,}00127$

2. $P(24 \leq T \leq 48) = e^{-24\lambda} - e^{-48\lambda}$ donc $P(24 \leq T \leq 48) \approx 0{,}0291$

3. *a.* $$P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = \frac{P\big((T \geq t) \cap (T \geq t + h)\big)}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t + h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h)$$

b. $P_{(T \geq 36)}(T \geq 36 + 12) = P(T \geq 12) = e^{-0{,}00127 \times 12}$ soit approximativement 0,9849

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

La probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois est $P((D \geq 48) \cap (T \geq 48))$

Les évènements $(D \geq 48)$ et $(T \geq 48)$ sont indépendants donc $P(D \geq 48) \times P(T \geq 48) = 0{,}7977 \times e^{-0{,}00127 \times 48} \approx 0{,}7505$

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

$n = 300$, $p = 0{,}7977$ et $n\,p = 239{,}31$ et $n\,(1-p) \approx 60{,}69$

$n \geq 50$, $n\,p \geq 5$ et $n\,(1-p) \geq 5$ donc les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation au risque 5 % sont réunies

$\mathrm{I} = \left[p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}{n} \,;\, p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}{n} \right]$ soit I = [0,7522 ; 0,8432] (Attention aux arrondis !)

D'après les résultats du garage, $f = \dfrac{246}{300} = 0{,}82$

$0{,}82 \in \mathrm{I}$ donc ce bilan ne remet pas en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $P(D \geq 48) = 0{,}7977$ avec un risque 5 %.