Nouvelle-Calédonie mars 2007

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(a\,n + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$.

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p.

Montrer, que si $5\,n + 2$ et $5\,p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5\,n - 26\,y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5\,x - 26\,y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

A. Donner une solution particulière de l'équation $5\,x - 26\,y = 2$.

B. Résoudre alors l'équation $5\,x - 26\,y = 2$.

C. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \le x \le 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

CORRECTION

1. Si $a = 0$, alors pour tout n, $a\,n + b = b$

Toutes les lettres de l'alphabet sont associées au même nombre donc seront codées par la même lettre.

2. Si $a = 13$, on associe l'entier b à A et $2 \times 13 + b$ à la lettre C

Le reste de la division par 26 de b et $26 + b$ est le même donc les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. *a.* si $5\,n + 2$ et $5\,p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $5\,n + 2 \equiv 5\,p + 2\ [\,26\,]$ donc $5\,(n - p) \equiv 0\ [\,26\,]$

donc 26 divise $5\,(n - p)$ or 26 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 26 divise $n - p$.

$n - p$ est un multiple de 26.

$0 \le n \le 25$ et $0 \le p \le 25$ donc $-25 \le -p \le 0$ d'où $-25 \le n - p \le 25$

Le seul multiple de 26 compris entre -25 et 25 est 0 donc $n - p = 0$ soit $n = p$

b.

Lettre	Nombre associé n	$5\,n + 2$	reste de la division de $5\,n + 2$ par 26	lettre associée
A	0	2	2	C
M	12	62	10	K
I	8	42	16	Q

Le mot AMI est codé par CQK.

4. *a.* La lettre E est associée au nombre 4, ce nombre est le reste de la division de $5\,x + 2$ par 26 où x est un entier inconnu associé à la lettre cherchée, $0 \le x \le 25$.

Lettre	Nombre associé n	$5\,n + 2$	reste de la division de $5\,n + 2$ par 26	lettre associée
?	x	$5\,x + 2$	4	E

donc $5\,x + 2 \equiv 4\ [\,26\,]$ soit il existe un entier relatif y tel que $5\,x + 2 = 26\,y + 4$

Il faut donc résoudre $5\,x - 26\,y = 2$ avec $y \in \mathbb{Z}$, et $x \in \Omega$.

***b.* A** $5 \times (-10) - 26 \times (-2) = -50 + 52 = 2$ donc $(-10 ; -2)$ est solution de $5\,x - 26\,y = 2$.

***b.* B.** $\begin{cases} 5\,x - 26\,y = 2 \\ 5 \times (-10) - 26 \times (-2) = 2 \end{cases}$ donc par différence membre à membre :

$5\,(x + 10) - 26\,(y + 2) = 0$

soit $5\,(x + 10) = 26\,(y + 2)$ donc 5 divise $26\,(y + 2)$ or 5 et 26 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise $y + 2$. Il existe un entier relatif k tel que $y + 2 = 5\,k$ donc en remplaçant dans $5\,(x + 10) = 26\,(y + 2)$, $x + 10 = 26\,k$

donc $y = 5\,k - 2$ et $x = 26\,k - 10$

Vérification :

s'il existe un entier relatif k tel que $y = 5\,k - 2$ et $x = 26\,k - 10$ alors $5\,x - 26\,y = 5 \times 26\,k - 5 \times 10 - 26 \times 5\,k + 26 \times 2 = 2$

donc les solutions de (E’) sont les couples ($26k - 10$; $5k - 2$) avec $k \in \mathbb{Z}$.

b. C. En déduire qu’il existe un unique couple (x ; y) solution de l’équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.
Si le couple (x ; y) est solution de l’équation $5x - 26y = 2$ alors il existe un entier relatif k tel que $x = 26k - 10$ et $y = 5k - 2$.
$0 \leq x \leq 25$ donc $10 \leq 26k \leq 35$ donc $k = 1$ donc $x = 16$ et $y = 3$

c. Pour décoder E, il faut trouver x tel que $0 \leq x \leq 25$ et $5x - 26y = 2$ donc $x = 16$ d’après les questions précédentes.

Lettre	Nombre associé n	$5n + 2$	reste de la division de $5n + 2$ par 26	lettre associée
Q	16	82	4	E

La lettre E est décodée par Q.