Si a et b sont deux entiers, le plus grand commun diviseur de a et b est noté $\Delta(a\ ;\ b)$.
Soit u la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n$.

1. Calculez les termes u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel et : $u_{n+1} = 2\,u_n + 1$.
Déduisez-en le plus grand commun diviseur, de deux termes consécutifs de la suite u.

3. *a.* Démontrez que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.
Les nombres $2^n - 1$ et $2^{n+1} - 1$ sont-ils premiers entre eux pour tout n ?

b. Vérifiez que pour tout couple d'entiers naturels $(n\ ;\ p)$: $u_{n+p} = u_n\,(u_p + 1) + u_p$.
Déduisez-en que pour tout couple $(n\ ;\ p)$ de N : $\Delta(u_n\ ;\ u_p) = \Delta(u_n\ ;\ u_{n+p})$ (1).

c. a et b sont deux entiers naturels non nuls, r le reste de la division euclidienne de a par b.
Déduisez de la propriété (1) que $\Delta(u_b\ ;\ u_r) = \Delta(u_a\ ;\ u_b)$ et que : $\Delta(u_a\ ;\ u_b) = u_{\Delta(a\ ;\ b)}$.
On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide, méthode des divisions successives.

d. Calculez alors $\Delta(u_{1980}\ ;\ u_{312})$.

CORRECTION

1. Si $n = 0$, $u_2 = 3\,u_1 - 2\,u_0 = 3$ donc $u_3 = 3\,u_2 - 2\,u_1 = 7$
$u_4 = 3\,u_3 - 2\,u_2 = 15$, $u_5 = 3\,u_4 - 2\,u_3 = 31$ et $u_6 = 3\,u_5 - 2\,u_4 = 63$

2. Soit la suite $v_n = u_{n+1} - 2\,u_n$ alors $v_{n+1} = u_{n+2} - 2\,u_{n+1} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n - 2\,u_{n+1} = u_{n+1} - 2\,u_n$
La suite (v_n) est donc constante donc pour tout entier n, $v_n = v_0 = u_1 - 2\,u_0 = 1$ or $v_n = 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - 2\,u_n = 1$
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2\,u_n + 1$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
Initialisation : $u_0 = 0$ donc u_0 est un entier naturel
Hérédité : Montrons pour tout entier naturel n, que si u_n est un entier naturel alors u_{n+1} est un entier naturel.
$u_{n+1} = 2\,u_n + 1$, or u_n est un entier naturel donc $2\,u_n + 1$ est également un entier naturel donc u_{n+1} est un entier naturel.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, u_n est un entier naturel.

$u_{n+1} - 2\,u_n = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, u_{n+1} et u_n sont premier entre eux donc $\Delta(u_{n+1}\ ;\ u_n) = 1$

3. *a.* Démontrez que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + 1$
$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2\,u_n - 1 - 1 = 2\,(u_n - 1)$ donc $v_{n+1} = 2\,v_n$
La suite (v_n) est géométrique de raison 2 de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 1$ donc pour tout entier naturel n, $v_n = 2^n$
$u_n + 1 = 2^n$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.

$\Delta(u_{n+1}\ ;\ u_n) = 1 \Leftrightarrow \Delta\,(2^{n+1} - 1\ ;\ 2^n - 1) = 1$. Les nombres $2^n - 1$ et $2^{n+1} - 1$ sont premiers entre eux pour tout n.

b. $u_n\,(u_p + 1) + u_p = (2^n - 1)\,(2^p - 1 + 1) + 2^p - 1 = 2^n \times 2^p - 2^p + 2^p - 1$
$u_n\,(u_p + 1) + u_p = 2^{n+p} - 1 = u_{n+p}$ donc pour tout couple d'entiers naturels $(n\ ;\ p)$: $u_{n+p} = u_n\,(u_p + 1) + u_p$.

Soit $d = \Delta(u_n\ ;\ u_{n+p})$ et $\delta = \Delta(u_n\ ;\ u_p)$,
d est un diviseur de u_n et de u_{n+p} donc d divise $u_{n+p} - u_n\,(u_p + 1)$ donc d divise u_p.
d divise u_n et u_p donc d divise $\Delta(u_n\ ;\ u_p)$ soit d divise δ.

δ est un diviseur de u_n et de u_p donc δ divise $u_n\,(u_p + 1) + u$ donc δ divise u_{n+p}.
δ divise u_n et u_{n+p} donc δ divise $\Delta(u_n\ ;\ u_{n+p})$ soit δ divise d.
δ divise d et d divise δ, d et δ sont deux entiers naturels donc $d = \delta$.
Pour tout couple $(n\ ;\ p)$ de N : $\Delta(u_n\ ;\ u_p) = \Delta(u_n\ ;\ u_{n+p})$.

c. a et b sont deux entiers naturels non nuls, r le reste de la division euclidienne de a par b.
Il existe donc un entier q tel que $a = b\,q + r$.
Montrons par récurrence que pour tout entier q, $\Delta(u_b\ ;\ u_r) = \Delta(u_b\ ;\ u_{bq+r})$
Initialisation : si $q = 0$, $b\,q + r = r$ donc $\Delta(u_b\ ;\ u_r) = \Delta(u_b\ ;\ u_{bq+r})$ la propriété est initialisée
Hérédité : Montrons pour tout entier que si $\Delta(u_b\ ;\ u_r) = \Delta(u_b\ ;\ u_{bq+r})$ alors $\Delta(u_b\ ;\ u_r) = \Delta(u_b\ ;\ u_{b(q+1)+r})$
Pour tout couple $(n\ ;\ p)$ de N : $\Delta(u_n\ ;\ u_p) = \Delta(u_n\ ;\ u_{n+p})$ donc $\Delta(u_b\ ;\ u_{b(q+1)+r}) = \Delta(u_b\ ;\ u_{bq+r+b}) = \Delta(u_b\ ;\ u_{bq+r})$ d'après la propriété (1) donc $\Delta(u_b\ ;\ u_{b(q+1)+r}) = \Delta(u_b\ ;\ u_r)$ par hypothèse de récurrence donc la propriété est héréditaire
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel q, $\Delta(u_b\ ;\ u_{b(q+1)+r}) = \Delta(u_b\ ;\ u_r)$ donc $\Delta(u_b\ ;\ u_r) = \Delta(u_a\ ;\ u_b)$.

Effectuons l'algorithme d'Euclide, soit r_{n-1} le dernier reste non nul alors $\Delta(a\,;b) = r_{n-1}$
Division euclidienne de a par b : $a = b\,q_1 + r_1$, avec $0 \le r_1 < b$ donc $\Delta(u_a\,;u_b) = \Delta(u_b\,;u_{r_1})$

→ si $r_1 = 0$ alors b divise a et $\Delta(a\,;b) = b$

$$\Delta(u_b\,;u_{r_1}) = \Delta(u_b\,;u_0) = \Delta(u_b\,;0) = u_b = u_{\Delta(a\,;b)}$$

→ si $r_1 \ne 0$: Division euclidienne de b par r_1 : $b = r_1\,q_2 + r_2$, avec $0 \le r_2 < r_1$ donc $\Delta(u_b\,;u_{r_1}) = \Delta(u_{r_1}\,;u_{r_2})$

donc : $\Delta(u_a\,;u_b) = \Delta(u_{r_1}\,;u_{r_2})$

→ si $r_2 = 0$: alors r_1 divise b et PGCD $(a\,;b)$ = PGCD $(b\,;r_1) = r_1$ et $\Delta(u_{r_1}\,;u_{r_2}) = \Delta(u_{r_1}\,;0) = u_{r_1} = u_{\Delta(a\,;b)}$.

→ si $r_2 \ne 0$: PGCD $(a\,;b)$ = PGCD $(b\,;r_1)$ = PGCD $(r_1\,;r_2)$.
$r_1 = r_2\,q_3 + r_3$, avec $0 \le r_3 < r_2$ …
On construit ainsi une suite (r_k) d'entiers naturels tels que : $b > r_1 > r_2 > \dots > r_{n-1} > r_n \ge 0$.
Cette suite est strictement décroissante, et son nombre de termes non nuls est fini.
Notons n le plus petit entier tel que $r_n = 0$, r_{n-1} est donc le dernier reste non nul.
PGCD $(a\,;b)$ = PGCD $(r_{n-2}\,;r_{n-1})$ = PGCD $(r_{n-1}\,;r_n)$ = PGCD $(r_{n-1}\,;0) = r_{n-1}$
$\Delta(u_a\,;u_b) = \Delta(u_{r_{n-1}}\,;u_{r_n}) = \Delta(u_{r_{n-1}}\,;0) = u_{r_{n-1}} = u_{\Delta(a\,;b)}$.

d. $\Delta(u_{1980}\,;u_{312}) = u_{\Delta(1980;\,312)}$
$312 = 2^3 \times 3 \times 13$ et $1980 = 4 \times 495 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ donc PGCD (1980; 312) $= 2^2 \times 3 = 12$
$\Delta(u_{1980}\,;u_{312}) = u_{\Delta(1980;\,312)} = u_{12} = 4095$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095