Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété (I) : pour tous réels x et y, $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\,f(y)}$.

Partie I

1. Montrer que s'il existe un réel c tel que $f(c) = 1$ ou $f(c) = -1$, alors la fonction f est constante.

On suppose dans toute la suite du problème que f est non constante.

2. *a.* En écrivant $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, montrer que pour tout réel x, on a : $-1 < f(x) < 1$.

b. Etablir que $f(0) = 0$ et en déduire que f est impaire.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x on a : $\dfrac{1+f(n\,x)}{1-f(n\,x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$

4. On pose $a = \dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}$. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis pour $n \in \mathbb{Z}^*$ la valeur $f(n)$ en fonction de a.

5. On pose $x = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $f(x)$ en fonction de a.

Partie II

La propriété (I) étant toujours satisfaite par f, on suppose de plus que f est dérivable en 0.

On note α le nombre dérivé de f en 0, c'est à dire $\alpha = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t}$.

1. Montrer que f est dérivable en tout réel x et que $f'(x) = \alpha\,(1 - f^2(x))$.
2. Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
3. On appelle f^{-1} la bijection réciproque de f et on admet que f^{-1} est dérivable sur $]-1\,;1[$.

a. Calculer la dérivée de $f \circ f^{-1}$ et en déduire que pour tout réel $y \in\,]-1\,;1[$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{\alpha\,(1-y^2)}$

b. Vérifier que pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, on a : $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$.

En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1\,;1[$.

c. En déduire f^{-1}, puis f.

CORRECTION

Partie I

1. Supposons qu'il existe un réel c tel que $f(c) = 1$ ou $f(c) = -1$

Pour tout x réel, $f(x) = f((x-c)+c) = \dfrac{f(x-c)+f(c)}{1+f(x-c)\,f(c)}$

donc si $f(c) = 1$, alors $f(x) = \dfrac{f(x-c)+1}{1+f(x-c)}$ donc $f(x) = 1$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

si $f(c) = -1$ alors $f(x) = \dfrac{f(x-c)-1}{1-f(x-c)} = -\dfrac{f(x-c)-1}{f(x-c)-1}$ donc $f(x) = -1$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

2. *a.* $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$ donc $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{2\,f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$f(x)-1 = \frac{2\,f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = -\frac{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\,f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^2}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

f est non constante donc pour tout x réel, $f\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 1$ donc $-\dfrac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^2}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)} < 0$ donc $f(x) - 1 < 0$ soit $f(x) < 1$

$$f(x)+1 = \frac{2\,f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)} + 1 = \frac{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\,f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

f est non constante donc pour tout x réel, $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq -1$ donc $\dfrac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2}{1+f^2\left(\frac{x}{2}\right)} > 0$ donc $f(x) + 1 > 0$ soit $f(x) > -1$

Pour tout réel x, on a : $-1 < f(x) < 1$.

2. *b.* Pour tous réels x et y, $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\,f(y)}$ donc en choisissant $x = y = 0$ alors $f(0) = \dfrac{2\,f(0)}{1+f^2(0)}$

donc $f(0)\,[1 + f^2(0)] = 2\,f(0)$ soit $f(0)\,[f^2(0) - 1] = 0$
f est non constante donc $f(0) \neq 1$ et $f(0) \neq -1$ donc $f^2(0) - 1 \neq 0$ donc $f(0) = 0$

Pour tous réels x et y, $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\,f(y)}$ donc en choisissant $y = -x$: $f(0) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)\,f(-x)}$

or $f(0) = 0$ donc $f(x) + f(-x) = 0$ donc f est impaire.

3. Soit x un réel quelconque,

Initialisation : si $n = 0$, $\dfrac{1+f(n\,x)}{1-f(n\,x)} = \dfrac{1+f(0)}{1-f(0)} = 1$, f est non constante donc $f(x) \neq -1$ donc $\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)} \neq 0$

donc $\left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^0 = 1$ d'où $\dfrac{1+f(n\,x)}{1-f(n\,x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^0$. La propriété est initialisée.

Hérédité : montrons pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout x réel, que si $\dfrac{1+f(n\,x)}{1-f(n\,x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$ alors $\dfrac{1+f((n+1)\,x)}{1-f((n+1)\,x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{n+1}$

$$\frac{1+f((n+1)\,x)}{1-f((n+1)\,x)} = \frac{1+\dfrac{f(n\,x)+f(x)}{1+f(n\,x)f(x)}}{1-\dfrac{f(n\,x)+f(x)}{1+f(n\,x)f(x)}} = \frac{1+f(n\,x)f(x)+f(n\,x)+f(x)}{1+f(n\,x)f(x)-f(n\,x)-f(x)}$$

$$\frac{1+f((n+1)\,x)}{1-f((n+1)\,x)} = \frac{1+\dfrac{f(n\,x)+f(x)}{1+f(n\,x)f(x)}}{1-\dfrac{f(n\,x)+f(x)}{1+f(n\,x)f(x)}} = \frac{1+f(n\,x)f(x)+f(n\,x)+f(x)}{1+f(n\,x)f(x)-f(n\,x)-f(x)} = \frac{1+f(x)+f(n\,x)\,(1+f(x))}{1-f(x)-f(n\,x)\,(1-f(x))}$$

$$\frac{1+f((n+1)\,x)}{1-f((n+1)\,x)} = \frac{(1+f(x))\,(1+f(n\,x))}{(1-f(x))\,(1-f(n\,x))} = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \times \frac{1+f(n\,x)}{1-f(n\,x)}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\dfrac{1+f(n\,x)}{1-f(n\,x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$ donc $\dfrac{1+f((n+1)\,x)}{1-f((n+1)\,x)} = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)} \times \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{n+1}$

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout x réel, $\dfrac{1+f(n\,x)}{1-f(n\,x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout x réel, $\dfrac{1+f(n\,x)}{1-f(n\,x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$, en choisissant $x = 1$, on obtient : $\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)} = \left(\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}\right)^n = a^n$

soit $1 + f(n) = a^n\,(1 - f(n))$ donc $f(n)\,[1 + a^n] = a^n - 1$

f est non constante donc $f(1) \neq -1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $a^n \neq -1$ donc $f(n) = \dfrac{a^n - 1}{a^n + 1}$.

5. $x = \dfrac{p}{q}$ donc $q\,x = p$ donc $f(q\,x) = f(p)$ or $\dfrac{1+f(q\,x)}{1-f(q\,x)} = \left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^q = f(p) = a^p$

Pour tout x réel ; $-1 < f(x) < 1$ donc $\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)} > 0$ donc $\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)} = a^{\frac{p}{q}}$ donc $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{a^{\frac{p}{q}} - 1}{a^{\frac{p}{q}} + 1}$.

Partie II

1. Soit t un réel quelconque, $f(x+t)=\dfrac{f(x)+f(t)}{1+f(x)\,f(t)}$ donc $f(x+t)-f(x)=\dfrac{f(x)+f(t)-f(x)[1+f(x)\,f(t)]}{1+f(x)\,f(t)}$

$$f(x+t)-f(x)=\frac{f(t)\ -f(t)\,f^{2}(x)}{1+f(x)\,f(t)}=\frac{f(t)[1-f^{2}(x)]}{1+f(x)\,f(t)}=\frac{1-f^{2}(x)}{1+f(x)\,f(t)}\times f(t)$$

$$\frac{f(x+t)-f(t)}{t}=\frac{1-f^{2}(x)}{1+f(x)\,f(t)}\times\frac{f(t)}{t}$$

f est dérivable en 0 donc continue en 0 donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=f(0)=0$ donc pour tout x réel, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t)-f(t)}{t}=(1-f^{2}(x))\times\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$

f est dérivable en tout réel x et que $f'(x)=\alpha\,(1-f^{2}(x))$.

2. Si $\alpha=0$ alors pour tout x réel, $f'(x)=0$ donc f est constante ce qui est exclu donc $\alpha\neq 0$

Pour tout x réel, $-1<f(x)<1$ donc $1-f^{2}(x)>0$, donc $f'(x)$ a le même signe que α, $\alpha\neq 0$ donc f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

3. *a*. Pour tout $y\in\,]-1\,;1[$, $f\,o\,f^{-1}(y)=y$ or $[f\,o\,f^{-1}]'(y)=(f^{-1})'(y)\,f'(f^{-1}(y))$ donc $(f^{-1})'(y)\,f'(f^{-1}(y))=1$

$f'(f^{-1})(y)=\alpha\,[\,1-f^{2}(f^{-1}(y))]$ or $f\,o\,f^{-1}(y)=y$ donc $f'(f^{-1})(y)=\alpha\,[\,1-y^{2}\,]$ .donc $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{\alpha\,(1-y^{2})}$.

b. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+x+1-x}{(1+x)(1-x)}=\dfrac{2}{2\,(1-x^{2})}=\dfrac{1}{1-x^{2}}$

donc pour tout $x\in\,]-1\,;1\,[$, on a : $\dfrac{1}{1-x^{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$.

sur $]-1\,;1\,[$, $1-x>0$ et $1+x>0$ donc une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$ est $x\mapsto\ln(1+x)-\ln(1-x)$

Une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x^{2}}$ sur $]-1\,;1\,[$ est $x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

c. $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{1-y^{2}}$ donc $f^{-1}(y)=\dfrac{1}{2\,\alpha}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$

$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$ donc $x=\dfrac{1}{2\,\alpha}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)\Leftrightarrow 2\,\alpha\,x=\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)\Leftrightarrow\dfrac{1+y}{1-y}=e^{2\,\alpha\,x}\Leftrightarrow 1+y=e^{2\,\alpha\,x}\,(1-y)$

$y\,(1+e^{2\,\alpha\,x})=e^{2\,\alpha\,x}-1$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $1+e^{2\,\alpha\,x}\neq 0$ donc $y=\dfrac{e^{2\,\alpha\,x}-1}{e^{2\,\alpha\,x}+1}$ soit $f(x)=\dfrac{e^{2\,\alpha\,x}-1}{e^{2\,\alpha\,x}+1}$