Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1· *a*. Démontrer que f est une fonction périodique, de période 2π.
Quelle propriété en déduit-on pour la courbe (C_f) ?

b. Pour h réel, comparer $f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)$ En déduire que la courbe (C_f) possède un élément de symétrie que l'on précisera.

c. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2· *a*. Déterminer la fonction dérivée de f et démontrer que, pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2(\sin x - 1)(2\sin x + 1)$

b. Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Représenter la courbe (C_f).

CORRECTION

1· *a*. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, pour tout x réel, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) - \sin 2(x+2\pi) = 2\cos x - \sin(2x + 2\times 2\pi)$.
$f(x+2\pi) = f(x)$ donc f est une fonction périodique, de période 2π.

Il suffit de tracer la courbe de f sur un intervalle de longueur 2π puis, pour obtenir le tracé complet de cette courbe, effectuer des translations successives $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π.

b. $f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - \sin 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = -2\sin h - \sin(\pi + 2h) = -2\sin h + \sin 2h$

$f\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right) - \sin 2\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = 2\sin h - \sin(\pi - 2h) = 2\sin h - \sin 2h$

donc $f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)$ donc le point I de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est centre de symétrie de la courbe.

c. f est une fonction périodique, de période 2π donc il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[0;2\pi]$ ou $[-\pi;\pi]$ ou $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Le point I de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est centre de symétrie de la courbe donc si on utilise l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, en étudiant f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$(courbe rouge), la courbe de f étant tracée sur cet intervalle, on obtient la courbe de f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ en effectuant une symétrie par rapport à I (courbe bleue). Pour obtenir le tracé complet de cette courbe, effectuer des translations successives $2\pi\vec{i}$ (courbe verte) et $-2\pi\vec{i}$ (courbe noire) en recommençant autant de fois que voulu.

Il suffit d'étudier f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2· *a*. $f'(x) = -2\sin x - 2\cos(2x)$ or $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $f'(x) = -2\sin x - 2(1 - 2\sin^2 x)$
$f'(x) = 2[2\sin^2 x - \sin x - 1]$
or $(\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 2\sin^2 x - \sin x - 1$ donc $f'(x) = 2(\sin x - 1)(2\sin x + 1)$

b. pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq 1$ donc $\sin x - 1 \leq 0$ et si $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

donc $f'(x)$ a le signe opposé à celui de $2 \sin x + 1$

$2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$ donc sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $2 \sin x + 1 = 0$ si $x = -\frac{\pi}{6}$

sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $2 \sin x + 1 > 0$ si $x > -\frac{\pi}{6}$ d'où le signe de $f'(x)$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x - 1$		–		–	0
$2 \sin x + 1$		–	0	+	
$f'(x)$					
f	0	$\nearrow$	$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\searrow$	0

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3. $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ donc il suffit de prendre des valeurs de x comprises entre – 1,57 et 1,57

x	$-\frac{\pi}{2}$	– 1,25	– 1	– 0,75	– 0,5	– 0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	1,23	1,99	2,46	2,60	2,42	2,00	1,46	0,91	0,47	0,17	0,03	0,00

On trace la partie de courbe correspondant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, puis on effectue la symétrie par rapport à I et ensuite les différentes translations, d'où la courbe.