a. Écrire sans le symbole Σ les nombres u_5 et u_6.

b. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n

c. Écrire sans le symbole Σ le nombre $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

d. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

CORRECTION

a. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

lorsque $k = 1$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{2}$ lorsque $k = 2$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{6}$ lorsque $k = 3$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{12}$

lorsque $k = 4$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{20}$ lorsque $k = 5$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{30}$ lorsque $k = 6$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{42}$

donc $u_5 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30} = \dfrac{5}{6}$

et $u_6 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42} = \dfrac{6}{7}$

b. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n

$u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ et $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

donc $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

c. Écrire sans le symbole Σ le nombre $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

lorsque $k = 1$: $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=1-\dfrac{1}{2}$ lorsque $k = 2$: $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$ lorsque $k = 3$: $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$

lorsque $k = 4$: $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$ lorsque $k = 5$: $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$ lorsque $k = 6$: $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}$

$$\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right) = 1-\frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

d. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{k+1-k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k(k+1)}$ donc pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = 1-\dfrac{1}{n+1}$

<u>Initialisation :</u> $u_1 = \dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{2}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$

<u>Hérédité :</u> Montrons pour tout n de $\mathbb{N}^*$ que si $u_n = 1-\dfrac{1}{n+1}$ alors $u_{n+1} = 1-\dfrac{1}{n+2}$

$u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = u_n + \dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

par hypothèse de récurrence, $u_n = 1-\dfrac{1}{n+1}$ donc $u_{n+1} = 1-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$ donc $u_{n+1} = 1-\dfrac{1}{n+2}$.

<u>Conclusion :</u> La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.