Nouvelle-Calédonie novembre 2014

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x+2}$.

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.
On a tracé en annexe 1 dans un repère orthonormé la courbe C représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.
1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. On note α la solution.
On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur la figure de annexe 1, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4. *a*. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$, où α est le réel défini dans la question 2.
b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par : $$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$
a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
b. Compléter l'algorithme donné en annexe pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

ANNEXE

Entrée	n un entier naturel
Variables	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement	Tant que ...
	Affecter à i la valeur $i + 1$
	Affecter à u la valeur ...
	Affecter à s la valeur ...
	Fin Tant que
Affichage :	On affiche s

CORRECTION

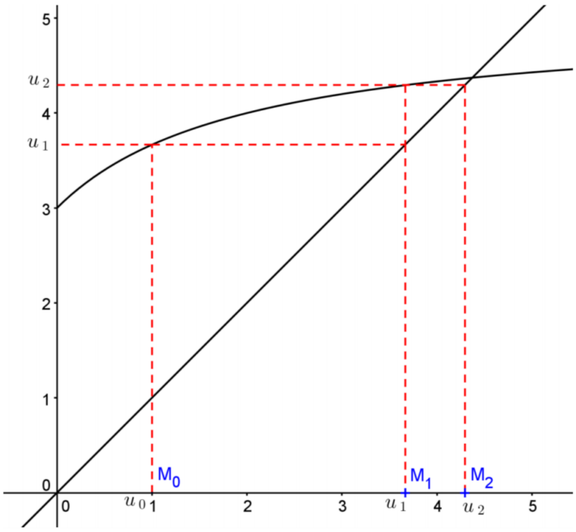
1. $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x+2}$ donc $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$ donc $f'(x) > 0$ sur $[\,0 \,;\, +\infty\,[$ donc f est croissante sur l'intervalle $[0 \,;\, +\infty\,[$.

2. $f(x) = x \Leftrightarrow 5 - \dfrac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5 - x = \dfrac{4}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)(5-x) = 4 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 10 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \times (-6) = 33$ donc $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{2}$.

L'équation $f(x) = x$ admet pour seule solution sur l'intervalle $[0 \,;\, +\infty\,[$, $\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{2}$, donc $\alpha \approx 4{,}37$.

3. La suite (u_n) semble être croissante et converger vers α.



4. *a.* **Initialisation :** $u_0 = 1$ donc $u_1 = f(1) = \dfrac{11}{3}$, $\alpha \approx 4{,}37$ et $\dfrac{11}{3} \approx 3{,}66$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

Hérédité : Montrons que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$, alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.
La fonction f est croissante sur $[0 \,;\, 1]$ donc si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$
$f(0) = 3$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc $3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$, soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc est vraie pour tout n de N : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

b. La suite (u_n) est croissante majorée par α donc est convergente et sa limite est comprise entre u_0 et α soit entre 1 et α.

5. *a.* $S_0 = u_0 = 1$

$S_1 = u_0 + u_1 = \dfrac{14}{3}$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \dfrac{457}{51}$ donc $S_1 \approx 4{,}67$ et $S_2 \approx 8{,}96$.

b.

Entrée	n un entier naturel
Variables	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement	Tant que $i < n$
	Affecter à i la valeur $i + 1$
	Affecter à u la valeur $5 - \dfrac{4}{u+2}$
	Affecter à s la valeur $s + u$
	Fin Tant que
Affichage :	On affiche s

c. Si la suite (S_n) converge vers ℓ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{n+1} = = \ell$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{n+1} - S_n = 0$ or $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

la suite (u_n) converge vers une limite comprise entre 1 et α. Ce qui est incohérent donc l'hypothèse « la suite (S_n) converge » est fausse, la suite (S_n) diverge.