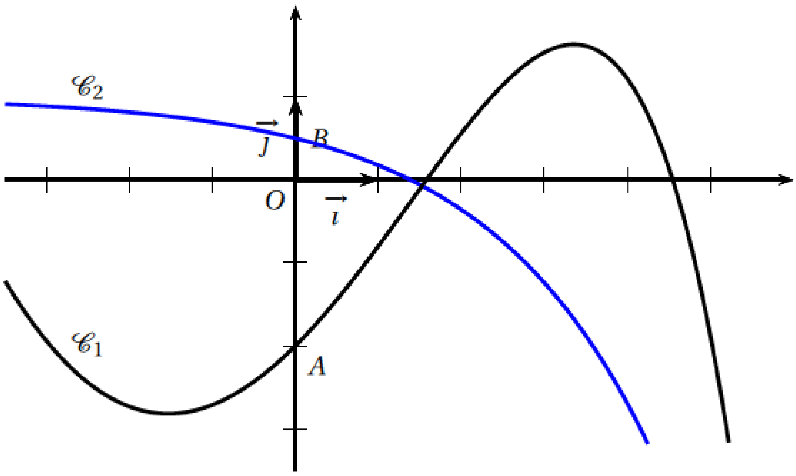
Soit f une fonction dérivable sur R dont le tableau de variations est donné ci-dessous où a et b désignent deux réels.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-\infty$

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé deux courbes C_1 et C_2.

Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\frac{1}{2}$ respectivement.

L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur R.



a. Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f'. Justifier la réponse.

b. À l'aide des courbes C_1 et C_2, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$.

3. Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que, pour tout réel x, $f(x) - 2 f'(x) = x$.

a. Déterminer une fonction affine g telle que pour tout réel x,

$$g(x) - 2 g'(x) = x.$$

b. Démontrer que la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2} y$.

c. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = k\, e^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.

d. En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F ainsi que les réels a et b.

CORRECTION

1. f est croissante sur $]-\infty ; a]$ donc pour tout x de $]-\infty ; a]$, $f'(x) \geq 0$

f est décroissante sur $[a ; +\infty[$ donc pour tout x de $[a ; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-\infty$

2. *a*. pour tout x de $]-\infty ; a]$, $f'(x) \geq 0$, et pour tout x de $[a ; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$ donc la courbe C_2 représente la fonction f'

b. f' s'annule en a or la courbe C_2 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse comprise entre 1 et 2 donc $1 < a < 2$.

C_1 représente une primitive F de la fonction f donc $F' = f$ et le coefficient directeur de la tangente à C_2 au point d'abscisse a est $f(a)$ or la tangente à C_2 au point d'abscisse a, a une coefficient directeur strictement positif donc $f(a) > 0$ donc $b > 0$

3. Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que, pour tout réel x, $f(x) - 2 f'(x) = x$.

a. g est une fonction affine g donc il existe deux réels m et p tels que pour tout x réel, $g(x) = m x + p$

g vérifie pour tout réel x, $g(x) - 2 g'(x) = x$.

donc pour tout réel x, $(m x + p) - 2 m = x \Leftrightarrow (m - 1) x = 2 m - p$

ceci doit être vrai pour tout x réel donc $m - 1 = 0$ et $2 m - p = 0$

soit $m = 1$ et $p = 2$ donc $g(x) = x + 2$

b. $(f - g)'(x) - \frac{1}{2}(f - g)(x) = f'(x) - \frac{1}{2} f(x) - g'(x) + \frac{1}{2} g(x)$

$(f - g)'(x) - \frac{1}{2}(f - g)(x) = \frac{1}{2}[f'(x) - 2 f(x)] + \frac{1}{2}[g'(x) - 2 g(x)]$

la fonction f est telle que, pour tout réel x, $f(x) - 2 f'(x) = x$.

la fonction g est telle que, pour tout réel x, $g(x) - 2g'(x) = x$.

$(f-g)'(x) - \frac{1}{2}(f-g)(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$

$(f-g)'(x) - \frac{1}{2}(f-g)(x) = 0$

donc pour tout x réel $(f-g)'(x) = \frac{1}{2}(f-g)(x)$

la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$.

c. l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ a pour solutions les fonctions de la forme $y = k\,e^{\frac{1}{2}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

donc pour tout x réel, $f(x) - g(x) = k\,e^{\frac{1}{2}x}$. soit $f(x) = k\,e^{\frac{1}{2}x} + x + 2$

d. $f'(x) = \frac{1}{2}k\,e^{\frac{1}{2}x} + 1$ or $f'(0) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2}k\,e^{\frac{1}{2}\times 0} + 1 = \frac{1}{2}$ soit $k = -1$

donc $f(x) = -e^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.

$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 1$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 2$

$\frac{1}{2}x = \ln 2$ donc $x = 2\ln 2$ donc $a = 2\ln 2$

$b = f(a) = -e^{\frac{1}{2}a} + a + 2 = -2 + 2\ln 2 + 2$ donc $b = 2\ln 2$

$F(x) = -2\,e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + k$.

$F(0) = -2$ donc $-2\,e^{\frac{1}{2}\times 0} + \frac{1}{2}\times 0^2 + 2\times 0 + k = -2$ donc $k = 0$

$F(x) = -2\,e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x$