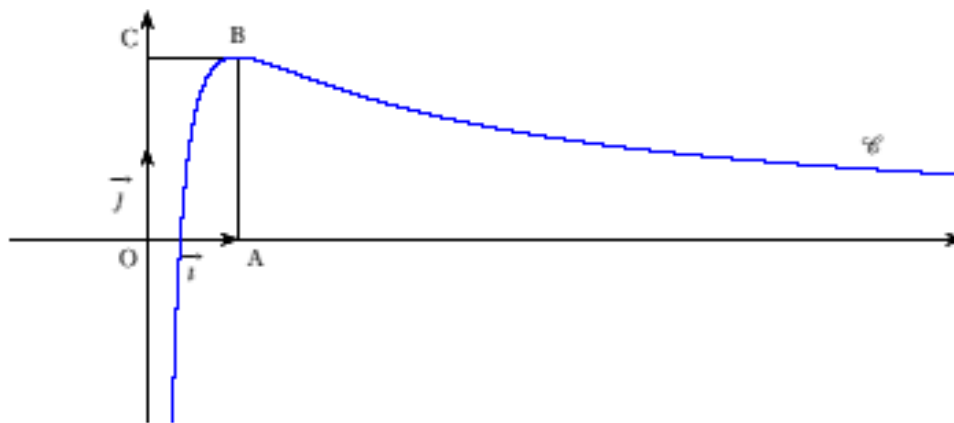


Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

– les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(0; 2)$;

– la courbe C passe par le point B et la droite (BC) est tangente à C en B ;

– il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif $f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}$.

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$

c. En déduire les réels a et b .

2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0. Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$ Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$. Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m . Sinon affecter à b la valeur m . Fin de Si. Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a . Afficher b .

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0			
b	1			
$b - a$				
m				

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} .

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe C partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

CORRECTION

1. a. $f(1)$ est l'ordonnée de B donc $f(1) = 2$ et $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en B, or cette tangente est horizontale donc $f'(1) = 0$

$$b. \begin{cases} u(x) = a + b \ln x & u'(x) = \frac{b}{x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases} \text{ donc } f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}.$$

pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$

c. $\ln 1 = 0$ et $f(1) = 2$ donc $a = 2$

$$f'(1) = b - a = 0 \text{ donc } a = b = 2 \text{ donc } f(x) = \frac{2 + 2 \ln x}{x}.$$

2. a. $a = b = 2$ donc $f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2}$ donc pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

$$b. f(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x) \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	2	0

3. a. La fonction f est définie continue strictement croissante sur $]0; 1]$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.

b. $f(5) \approx 1,04$ et $f(6) \approx 0,93$ donc $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$

Il existe un unique réel β de l'intervalle $]1; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$ donc $5 < \beta < 6$.

4. a.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	0,46875
$f(m)$	1,23	-3,09	0,10	0,79	1,03

b. $0,4375 < \alpha < 0,5$.

c. On cherche β tel que $f(\beta) = 1$.

x	1	β	$+\infty$
f	2	1	0

f est décroissante sur $[1; +\infty[$ donc pour tout x de $[1; +\infty[$, si $f(x) > 1$ alors $1 < x < \beta$ et si $f(x) \leq 1$ alors $x \geq \beta$

Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 1$, comme f est décroissante sur $[1; +\infty[$ alors $\frac{1}{2}(a+b) < \beta$ donc $\frac{1}{2}(a+b) < \beta < b$

a prendra la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$ dans le cas contraire $\frac{1}{2}(a+b) \geq \beta$ donc $a < \beta \leq \frac{1}{2}(a+b)$, b prendra la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.

d'où l'algorithme

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 5. Affecter à b la valeur 6.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$ Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$. Si $f(m) > 1$ alors Affecter à a la valeur m . Sinon affecter à b la valeur m . Fin de Si. Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a . Afficher b .

5. a. Le rectangle OABC a pour aire $OA \times OC = 1 \times 2 = 2$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 2(1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

La fonction f est positive sur $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$, donc l'aire du domaine limité par la courbe de f , l'axe des abscisses, les droites d'équation

$$x = \frac{1}{e} \text{ et } x = 2 \text{ est } \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx. \text{ Cette aire doit être la moitié de l'aire du rectangle donc il faut montrer que } \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1.$$

b. $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, donc une primitive de f est la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = 2 \ln x + (\ln x)^2$ donc

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = F(1) - F\left(\frac{1}{e}\right) \text{ or } \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1 \text{ donc } F\left(\frac{1}{e}\right) = -2 + (-1)^2 = -1 \text{ donc } \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 0 - (-1)$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1, \text{ l'aire du domaine limité par la courbe de } f, \text{ l'axe des abscisses, les droites d'équation } x = \frac{1}{e} \text{ et } x = 2 \text{ est la moitié}$$

de l'aire du rectangle OABC.