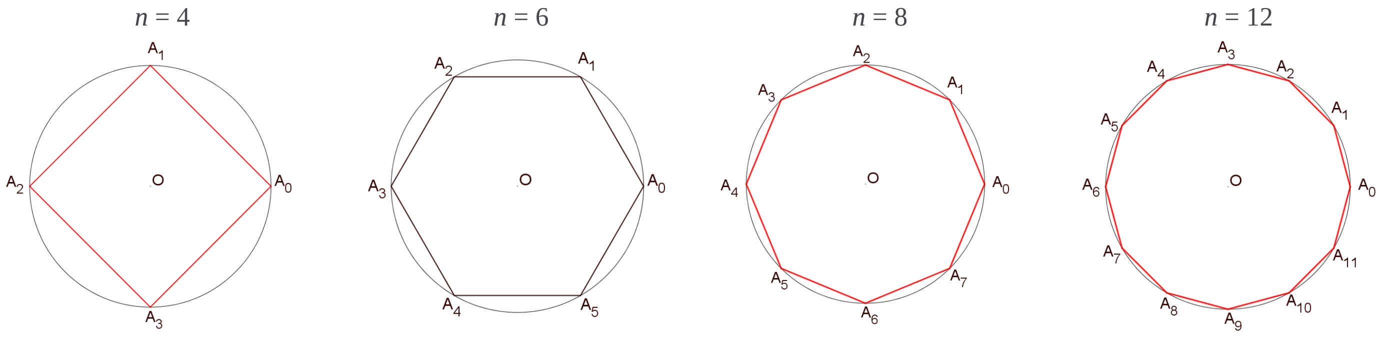
Le but de ce problème est de créer un algorithme permettant d'obtenir des approximations du nombre π.

Partie A : Une suite qui converge vers π

On considère un cercle C de centre O et de rayon 1, et un polygone régulier P_n à n côtés, inscrit dans C.



Pour tout $n \geq 3$, on notre p_n le périmètre de P_n.

1. Expliquer brièvement, par de simples considérations géométriques et sans calcul, pourquoi on peut conjecturer que la suite (p_n) tend vers 2π lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite du devoir on pose $a_n = \dfrac{p_n}{2}$ (C'est le demi-périmètre de P_n.)

La suite a_n est donc une suite qui semble converger vers π.

2. Justifier que chaque côté de P_n mesure $2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ et en déduire que $a_n = n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

3. Prouver, cette fois-ci à l'aide de calcul, qu'on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \pi$.

4. On évalue la vitesse de convergence d'une suite (u_n) convergent vers ℓ par $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$.

La vitesse de convergence est comprise entre 0 (convergence rapide) à 1 (convergence lente)
Grâce à un logiciel de calcul formel (Xcas), donner la vitesse de convergence de la suite (a_n).

Partie B : Une suite extraite

On considère maintenant la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

Cette suite est dite "extraite" de la suite (a_n) puisqu'on se contente d'en prendre les termes dont les indices sont des puissances de 2. Elle converge vers π aussi.

5. Grâce à un logiciel de calcul formel (Xcas), donner la vitesse de convergence de la suite (u_n)

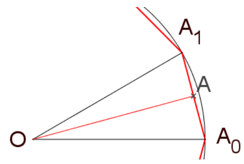
CORRECTION

1. Lorsque n tend vers $+\infty$, le polygone P_n tend à se confondre avec le cercle C donc le périmètre p_n de P_n tend vers celui de C soit 2π.

Dans la suite du devoir on pose $a_n = \dfrac{p_n}{2}$ (C'est le demi-périmètre de P_n.)

La suite a_n est donc une suite qui semble converger vers π.

2. Le polygone P_n est régulier donc tous les angles au centre $\widehat{A_k O A_{k+1}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$ sont égaux à $\dfrac{2\pi}{n}$. Chaque côté de P_n mesure $2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$



Soit A le milieu de $[A_0A_1]$. Dans le triangle isocèle OA_0A_1, la médiane (OA) est aussi hauteur et bissectrice de $\widehat{A_0OA_1}$ donc le triangle OAA_0 est rectangle en A et $\widehat{A_0OA} = \dfrac{\pi}{n}$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{AA_0}{OA_0} = AA_0$ donc $A_0A_1 = 2\,AA_0 = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Le polygone P_n a n côtés donc son périmètre p_n est égal à $n\,A_0A_1 = 2n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ donc $a_n = \dfrac{p_n}{2} = n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

3. Soit $x = \dfrac{\pi}{n}$, alors $n = \dfrac{\pi}{x}$ donc $n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \pi\,\dfrac{\sin x}{x}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x = 0$ or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pi$.

4. a_n converge vers π, il suffit donc de demander $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) - \pi}{n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) - \pi}$,

D'après XCas : limite(((n+1)*sin(pi()/(n+1))-pi())/(n*sin(pi()/n)-pi()),n,+infinity) = 1 soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}-\pi}{a_n-\pi}\right| = 1$, la vitesse est lente.

Partie B : Une suite extraite

5. $$\frac{u_{n+1}-\pi}{u_n-\pi} = \frac{2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)-\pi}{2^n\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)-\pi} = 2\,\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)-\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)-\dfrac{\pi}{2^n}}$$

D'après XCas : limite(((sin(pi()/(2^(n+1))-pi()/2^(n+1))/(sin(pi()/(2^n))-pi()/2^n),n,+infinity) = 0 soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}-\pi}{u_n-\pi}\right| = 0$, la vitesse est rapide.