Nouvelle-Calédonie novembre 2016

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\,e^{-x} - 0{,}1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

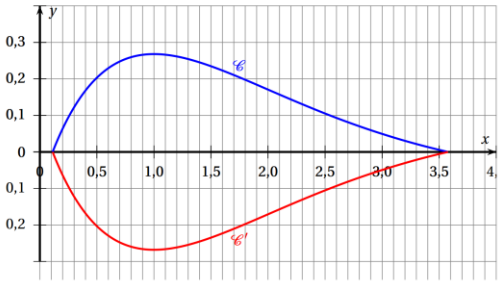
2. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que

$$\alpha < \beta \text{ et } f(\beta) = 0.$$

On note C la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ dans un repère orthogonal et C ′ la courbe symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.
L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.
Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ par

$$F(x) = -(x+1)\,e^{-x} - 0{,}1\,x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes C et C ′.
On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0{,}112$ et $\beta \approx 3{,}577$.

6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

CORRECTION

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -0{,}1$

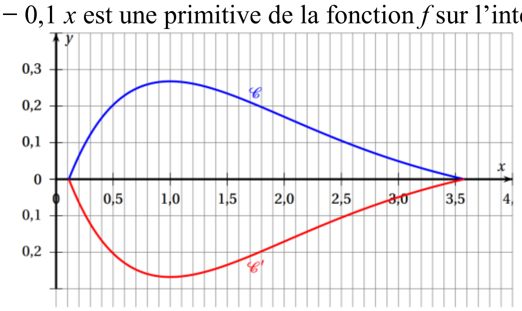
2. $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1 - x)\,e^{-x}$

La fonction exponentielle est strictement positive donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-0{,}1$	$\nearrow$	$e^{-1} - 0{,}1$	$\searrow$	$-0{,}1$

3. La fonction f est définie continue strictement croissante sur $[0 ; 1]$, $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

4. $\begin{cases} u(x) = x + 1 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $F'(x) = -e^{-x} + (x+1)\,e^{-x} - 0{,}1 = x\,e^{-x} - 0{,}1 = f(x)$ donc la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ par $F(x) = -(x+1)\,e^{-x} - 0{,}1\,x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.



5. La courbe C' est la symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses donc $A = 2\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

$A = 2\,[F(\beta) - F(\alpha)]$ donc $A \approx 2 \times 0{,}5197$ soit $A \approx 1{,}039$ à 0,001 près.

6. L'unité sur chaque axe est de 5 mètres, donc une unité d'aire est égale à 25 m^2. L'aire du domaine entre les deux courbes est donc approximativement de $1{,}039 \times 25 = 25{,}975$ m^2.
On peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré donc sur 26 m2 on en disposera $25{,}975 \times 36$ soit 935 plants de tulipes