Le but de l'exercice est de trouver le reste de la division euclidienne de 266^{269} par 377.

1. Décomposer 377 en produit de facteurs premiers.
En déduire que si r est le reste de la division euclidienne de 266^{269} par 377 alors $266^{269} \equiv r$ (29) et $266^{269} \equiv r$ (13)

2. *a*. Montrer que $266^{269} \equiv 2$ (13)

2. *b*. Montrer que $266^{269} \equiv 9$ (29).

2. *c*. En déduire que r est solution du système $\begin{cases} x \equiv 2 \quad (13) \\ x \equiv 9 \quad (29) \end{cases}$

3. Déterminer par la méthode de votre choix, deux entiers relatifs solutions de $13u + 29v = 1$

4. *a*. **Existence d'une solution**
Soit $N = 2 \times 29u + 9 \times 13v$ où u et v sont les entiers déterminés précédemment
Démontrer que N est solution du système $\begin{cases} x \equiv 2 \quad (13) \\ x \equiv 9 \quad (29) \end{cases}$.
Vérifier que 67 est également solution du système $\begin{cases} x \equiv 2 \quad (13) \\ x \equiv 9 \quad (29) \end{cases}$.
En déduire que toute solution du système $\begin{cases} x \equiv 2 \quad (13) \\ x \equiv 9 \quad (29) \end{cases}$ vérifie $x \equiv 67$ (377)

4. *b*. **Unicité de la solution**
Montrer que si a et b sont solutions du système $\begin{cases} x \equiv 2 \quad (13) \\ x \equiv 9 \quad (29) \end{cases}$ alors $a \equiv b$ (377).

4. *c*. Conclure.

CORRECTION

1. Décomposons 377 en produit de facteurs premiers : $377 = 13 \times 29$

Soit r le reste de la division de 266^{269} par 377
$377 = 13 \times 29$ et 377 divise $266^{269} - r$ donc 13 divise $266^{269} - r$ et 29 divise $266^{269} - r$ donc $266^{269} \equiv r$ (29) et $266^{269} \equiv r$ (13)

2. *a*. D'après le petit théorème de Fermat : $266^{12} \equiv 1$ (13) et $266^{28} \equiv 1$ (29)
Divisons 269 par 12 : $269 = 12 \times 22 + 5$ donc $266^{269} = 266^{12 \times 22 + 5}$ donc $266^{269} \equiv 266^5$ (13)
Divisons 266 par 13 : $266 = 13 \times 20 + 6$ donc $266 \equiv 6$ (13) donc $266^5 \equiv 6^5$ (13)
$6^2 = 36 = 13 \times 3 - 3$ donc $6^2 \equiv -3$ (13)
$6^3 \equiv 60$ (13) or $60 = 13 \times 5 - 5$ donc $6^3 \equiv -5$ (13)
$6^5 = 6^2 \times 6^3$ donc $6^5 \equiv -3 \times (-5)$ (13) soit $6^5 \equiv 15$ (13) or $15 = 13 + 2$ donc $6^5 \equiv 2$ (13)

$\begin{cases} 266^{269} \equiv 266^5 \quad (13) \\ 266^5 \equiv 6^5 \quad (13) \\ 6^5 \equiv 2 \quad (13) \end{cases}$ d'où $266^{269} \equiv 2$ (13)

2. *b*. Divisons 269 par 28 : $269 = 28 \times 9 + 17$ donc $266^{269} = 266^{28 \times 9 + 17}$ donc $266^{269} \equiv 266^{17}$ (29)

Divisons 266 par 29 : $266 = 29 \times 9 + 5$ donc $266 \equiv 5$ (29) donc $266^{17} \equiv 5^{17}$ (29)
$5^3 = 125 = 29 \times 4 + 9$ donc $5^3 \equiv 9$ (29) donc en élevant successivement au carré :
$9^2 = 81 = 29 \times 3 - 6$ donc $9^2 \equiv -6$ (29) donc $5^6 \equiv -6$ (29)
$5^{12} \equiv 36$ (29) soit $5^{12} \equiv 7$ (29) donc $5^{15} \equiv 7 \times 9$ (29) soit $5^{15} \equiv 5$ (29)
$5^{17} = 5^{15} \times 5^2$ donc $5^{17} \equiv 5^3$ (29) donc $5^{17} \equiv 9$ (29)

$\begin{cases} 266^{269} \equiv 266^{17} \quad (29) \\ 266^{17} \equiv 5^{17} \quad (29) \\ 5^{17} \equiv 9 \quad (29) \end{cases}$ d'où $266^{269} \equiv 9$ (29).

2. *c*. On a donc le système : $\begin{cases} 266^{269} \equiv 2 \quad (13) \\ 266^{269} \equiv 9 \quad (29) \end{cases}$ or $\begin{cases} 266^{269} \equiv r \quad (13) \\ 266^{269} \equiv r \quad (29) \end{cases}$ donc $\begin{cases} r \equiv 2 \quad (13) \\ r \equiv 9 \quad (29) \end{cases}$

3. 29 et 13 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $29u + 13v = 1$
$\begin{cases} 29 = 2 \times 13 + 3 \\ 13 = 3 \times 4 + 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 4 \times 29 = 4 \times 2 \times 13 + 4 \times 3 \\ 13 = 3 \times 4 + 1 \end{cases}$ donc par soustraction membre à membre : $4 \times 29 - 13 = 8 \times 13 - 1$
soit $-4 \times 29 + 9 \times 13 = 1$ donc $u = -4$ et $v = 9$

4. *a*. Existence d'une solution

Pour $u = -4$ et $v = 9$, alors N = 821 or $821 = 13 \times 63 + 2$ donc $N \equiv 2\ (13)$

$821 = 29 \times 28 + 9$ donc $N \equiv 9\ (29)$ donc N est solution de $\begin{cases} x \equiv 2 & (13) \\ x \equiv 9 & (29) \end{cases}$.

$821 = 377 \times 2 + 67$ donc $821 \equiv 67\ (13)$ et $821 \equiv 67\ (29)$ donc 67 est solution du système $\begin{cases} x \equiv 2 & (13) \\ x \equiv 9 & (29) \end{cases}$.

$\begin{cases} x \equiv 2 & (13) \\ x \equiv 9 & (29) \end{cases}$ et $\begin{cases} 67 \equiv 2 & (13) \\ 67 \equiv 9 & (29) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x \equiv 67 & (13) \\ x \equiv 67 & (29) \end{cases}$ donc 13 et 29 divisent $x - 67$,

13 et 29 sont premiers entre eux donc 13×29 divise $x - 67$ donc il existe un entier relatif k, tel que $x - 67 = 13 \times 29\ k$

donc $x = 67 + 377\ k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Le système $\begin{cases} x \equiv 2 & (13) \\ x \equiv 9 & (29) \end{cases}$ admet des solutions de la forme $x = 67 + 377\ k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4. *b*. Unicité de la solution

si a et b sont solutions du système $\begin{cases} x \equiv 2 & (13) \\ x \equiv 9 & (29) \end{cases}$ alors $a \equiv b\ (13)$ et $a \equiv b\ (29)$ donc 13 divise $a - b$ et 29 divise $a - b$ or 13 et 29 sont premiers entre eux donc 13×29 divise $a - b$ donc $a \equiv b\ (377)$.

4. *c*. Le système $\begin{cases} x \equiv 2 & (13) \\ x \equiv 9 & (29) \end{cases}$ admet pour seules solutions, les solutions de la forme $x = 67 + 377\ k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

r est solution de ce système est $0 \leq r < 377$ donc $0 \leq 67 + 377\ k < 377$ donc $k = 0$ donc $r = 67$

Le reste de la division euclidienne de 266^{269} par 377 est 67.