France septembre 2002

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité graphique 4 cm.

On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe *z*, est associé le point M′ d'affixe Z définie par : $Z = \dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1. *a.* Calculer l'affixe du point C′ associé au point C d'affixe − i.

b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + i\,y$ où x et y désignent deux nombres réels.

a. Montrer l'égalité : $Z = \dfrac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\,\dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}$

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe *z* telle que Z soit réel.

c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe *z* telle que Re(Z) soit négatif ou nul.

3. *a.* Écrire le nombre complexe (1− i) sous forme trigonométrique.

b. Soit M un point d'affixe *z*, distinct de A et de B. Montrer que : $\dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R}^*$ si et seulement s'il existe un entier *k* tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

CORRECTION

1. *a.* $c' = \dfrac{(1-i)(-i-i)}{-i-1} = \dfrac{2\,i(1-i)}{i+1} = \dfrac{2(i+1)}{i+1} = 2$

2. *a.* $Z = \dfrac{(1-i)[x+i(y-1)]}{x-1+i\,y} = \dfrac{(1-i)[x+i(y-1)][x-1-i\,y]}{[x-1+i\,y][x-1-i\,y]}$

$Z = \dfrac{(1-i)[x(x-1)-i\,x\,y+i(y-1)(x-1)+y(y-1)]}{(x-1)^2+y^2}$

$Z = \dfrac{(1-i)[x^2-x+y^2-y+i(-x\,y+x\,y-y-x+1)]}{(x-1)^2+y^2} = \dfrac{(1-i)[x^2-x+y^2-y+i(-y-x+1)]}{(x-1)^2+y^2}$

$Z = \dfrac{x^2-x+y^2-y+i(-y-x+1)-i(x^2-x+y^2-y)-y-x+1}{(x-1)^2+y^2}$

$Z = \dfrac{x^2-2x+y^2-2y+1-i(x^2+y^2-1)}{(x-1)^2+y^2} = \dfrac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\,\dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}$

b. Z est réel $\Leftrightarrow \dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1}$ réel avec $z \neq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 0$ avec $(x ; y) \neq (1 ; 0)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ avec $(x ; y) \neq (1 ; 0)$ ⇔ OM = 1 et M ≠ A ⇔ M décrit le cercle de centre O de rayon 1 privé de A

c. **R**e(Z) négatif ou nul $\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} \leq 0$ avec $(x ; y) \neq (1 ; 0)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ avec $(x ; y) \neq (1 ; 0)$

⇔ ΩM ≤ 1 et M ≠ A où Ω est le point d'affixe 1 + i

⇔ M décrit le disque de centre Ω de rayon 1 privé de A

3. *a.* $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$

b. $\dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1} = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\dfrac{(z-i)}{z-1}$ donc $\arg\dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1} = -\dfrac{\pi}{4} + \arg\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right)$

$\dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1} = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + \arg\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right) = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

c. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$ Z est réel non nul

Z = 0 $\Leftrightarrow$ z = i or Z est réel $\Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O de rayon 1 privé de A donc Z est réel non nul $\Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O de rayon 1 privé de A et B

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O de rayon 1 privé de A et B

d. Re(Z) soit négatif ou nul $\Leftrightarrow$ M décrit le disque de centre Ω de rayon 1 privé de A
donc Re(Z) > 0 $\Leftrightarrow$ M décrit le plan privé du disque de centre Ω de rayon 1

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \arg \frac{(1 - \mathrm{i})\,(z - \mathrm{i})}{z - 1} = 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$ Z réel positif non nul

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Z réel} \\ \text{et Re (Z)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{M décrit le cercle de centre O de rayon 1 privé de A et B} \\ \text{et M décrit le plan privé du disque de centre } \Omega \text{ de rayon 1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ M décrit l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ intersection de ces deux ensembles, A et B exclus