La fonction logarithme népérien.

I – Une définition de la fonction logarithme népérien.

Définition.

La fonction exponentielle est définie, continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans] 0 ; + ∞ [donc, pour tout $y > 0$, l'équation $e^x = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée $\ln(y)$.

On définit ainsi la fonction ln : $y \mapsto \ln(y)$, sur] 0 ; + ∞ [qui à tout $y > 0$ associe $\ln(y)$, l'unique solution de $e^x = y$.

On notera par la suite $f(x) = \ln(x)$ cette fonction appliquée à x.

Propriétés :

1 La fonction ln est définie sur] 0 ; + ∞ [, et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$: ln :] 0 ; + ∞ [$\mapsto$ R .

2. Pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
3. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
4. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

II - Propriétés de la fonction ln

1. Pour tout $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.
2. Pour tout $a > 0$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
3. Pour tout $a > 0$ et $b > 0$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
4. Pour tout $a > 0$, et tout n de $\mathbb{N}$ $\ln a^n = n \ln a$ plus généralement la propriété est vraie pour tout n dans $\mathbb{Q}$
5. Pour tout $a > 0$, $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

III - Etude de la fonction ln

Propriété : La fonction ln est définie continue dérivable sur] 0 ; + ∞ [et $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$

Propriété : La fonction ln est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

Pour tout a et b réels strictement positifs, $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$.

Pour tout a et b réels strictement positifs, $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$.

Propriété : Signe de la fonction ln :

$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x \in$] 0 ; 1 [

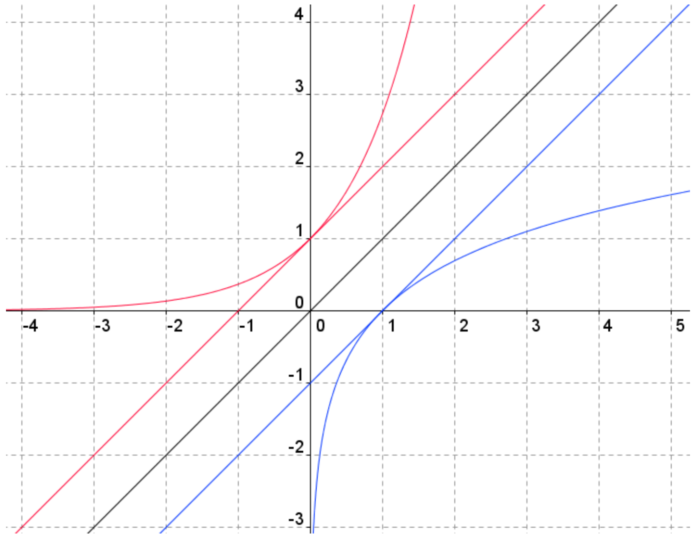
$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in$] 1 ; + ∞ [

Propriétés :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ la fonction x^n tend plus vite vers 0 que la fonction ln ne tend vers l'infini.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ **= 1** $\ln(1 + x)$ et x ont le même comportement près de 0.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ la fonction x^n tend plus vite vers l'infini que la fonction ln.

Propriété : Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

En rouge la fonction exponentielle et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0
En bleu la fonction logarithme népérien et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 1
En noir, la droite d'équation $y = x$



Propriété : Soit u une fonction dérivable sur I, à valeurs strictement positives. ln(u) est dérivable et $\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}$

IV Logarithme de base *a*, *a* > 0
Définition.

1. Soit a un réel strictement positif, différent de 1. On appelle logarithme de base a, la fonction notée $\log_a$ définie pour tout x strictement positif par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

2. Le logarithme décimal est le logarithme de base 10, noté en général log : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Le logarithme décimal est particulièrement utile pour gérer les puissances de 10.
On retiendra les propriétés suivantes :

- $\log 1 = 0$,
- $\log 10 = 1$
- $\log(10^n) = n$
- $\log(a\,b) = \log(a) + \log(b)$ pour $a > 0$ et $b > 0$ ….