Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère la parabole P d'équation $y = x^2$ et le point A (1 ; 0)
Déterminer le point M de la courbe tel que la distance AM soit minimale.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = AM^2$ où M est le point de la courbe P.

1. Déterminer $f(x)$
2. Etudier les variations de $f'(x)$
3. En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
4. Par dichotomie, déterminer un encadrement de α par deux réels a et b, où a et b sont défini à 10^{-4} près.

Donner l'algorithme correspondant.

CORRECTION

1. $f(x) = AM^2 = (x-1)^2 + (x^2-0)^2$ donc $f(x) = x^4 + x^2 - 2x + 1$

2. $f'(x) = 4x^3 + 2x - 2$

Il faut déterminer les variations de $f'(x)$ donc calculons sa dérivée f'' :
$f''(x) = 12x^2 + 2$
Pour tout x réel, $f''(x)$ est la somme de deux termes positifs $12x^2$ et 4 donc est strictement positive donc f' est strictement croissante sur R.

3. f' est un polynôme donc a la même limite à l'infini que son terme de plus haut degré,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$

f' est un polynôme donc est une fonction continue sur R, f' est strictement croissante sur R, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$

donc l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

4.

Algorithme	**Traduction sur calculatrice CASIO** **Programme : DICHOTOM**
Variables : A la borne inférieure de l'intervalle B la borne supérieure de l'intervalle C le centre de l'intervalle E l'amplitude de l'encadrement Initialisation : Fonction de type Y= Entrées : A la borne inférieure de l'intervalle de départ B la borne supérieure de l'intervalle de départ E l'amplitude de l'encadrement cherché Y1 la fonction f Traitement : Tant que l'amplitude de l'intervalle [A ; B] est supérieure à E : Déterminer le centre de l'intervalle [A ; B]. Affecter cette valeur à C. Si f (A) × f (B) ≤0 Affecter C à B. Sinon, affecter C à A. Fin du si. Fin du tant que. Afficher A et B.	"A" ? → A "B" ? → B "AMPLITUDE" ? → E Y=Type "FONCTION" ? → **Y**1 While B – A > E (A + B) / 2 → C If **Y**1(A) × **Y**1(C) ≤ 0 Then C → B Else C → A IfEnd WhileEnd A ◢ B

Mise en œuvre : $a = 0{,}5897$ et $b = 0{,}5898$ donc $0{,}5897 \leq \alpha \leq 0{,}5898$, voir tableau ci-dessous.

a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	1	0,5	– 2	4	– 0,5	1
0,5	1	0,75	– 0,5	4	1,1875	0,5
0,5	0,75	0,625	– 0,5	1,1875	0,2266	0,25
0,5	0,625	0,5625	– 0,5	0,2266	– 0,1631	0,125
0,56250	0,62500	0,59375	– 0,16309	0,22656	0,02478	0,06250
0,56250	0,59375	0,57813	– 0,16309	0,02478	– 0,07085	0,03125
0,57813	0,59375	0,58594	– 0,07085	0,02478	– 0,02346	0,01563
0,58594	0,59375	0,58984	– 0,02346	0,02478	0,00055	0,00781
0,58594	0,58984	0,58789	– 0,02346	0,00055	– 0,01148	0,00391
0,58789	0,58984	0,58887	– 0,01148	0,00055	– 0,00547	0,00195
0,58887	0,58984	0,58936	– 0,00547	0,00055	– 0,00246	0,00098
0,58936	0,58984	0,58960	– 0,00246	0,00055	– 0,00096	0,00049
0,58960	0,58984	0,58972	– 0,00096	0,00055	– 0,00020	0,00024
0,58972	0,58984	0,58978	– 0,00020	0,00055	0,00017	0,00012
0,58972	0,58978	0,58975	– 0,00020	0,00017	– 0,00001	0,00006