Soit $k$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient $k$ boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

**Partie A**
Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.
**1.** Un joueur joue une partie. On note $p$ la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.
Démontrer que $p = 0{,}42$.
**2.** Soit $n$ un entier tel que $n \geq 2$. Un joueur joue $n$ parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et $p_n$ la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des $n$ parties.
***a.*** Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.
***b.*** Exprimer $p_n$ en fonction de $n$, puis calculer $p_{10}$ en arrondissant au millième.
***c.*** Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.
**Partie B**
Dans la partie B, le nombre $k$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note $Y_k$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
**1. *a.*** Justifier l'égalité : $p\,(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$
***b.*** Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y_k$.
**2.** On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $Y_k$.
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
Déterminer les valeurs de $k$ pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

## CORRECTION

**Partie A**
**1.** Le joueur prélève au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne donc le nombre de cas possibles est $10^2$
Le nombre de cas favorables est celui d'obtenir d'abord une boule blanche puis une noire ou d'obtenir d'abord une boule noire puis une blanche, le nombre de cas favorables est $2 \times 3 \times 7 = 42$
La probabilité que le joueur gagne la partie est égale à $\dfrac{42}{100}$ donc $p = 0{,}42$.
**2. *a.*** Soit l'expérience : « prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne »
On a une succession de $n$ expériences aléatoires identiques et indépendantes. Chacune d'elle a deux issues :

- le joueur gagne la partie ($p = 0{,}42$)
- le joueur ne gagne pas la partie ($q = 1 - p = 0{,}58$)

donc la variable aléatoire X qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

***b.*** $p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}58^n$
$p_{10} = 1 - 0{,}58^{10} \approx 0{,}996$

***c.*** Chercher le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 % revient à résoudre $p_n \geq 0{,}99$
$1 - 0{,}58^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}99 \geq 0{,}58^n \Leftrightarrow \ln 0{,}01 \geq \ln 0{,}58^n \Leftrightarrow \ln 0{,}01 \geq n \ln 0{,}58 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}58}$
$\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}58} \approx 8{,}45$ donc le nombre minimal de parties est 9.

**Partie B**
**1. *a.*** Un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ;
Le joueur prélève au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne donc le nombre de cas possibles est $(k + 3)^2$
Le nombre de cas favorables est celui d'obtenir d'abord une boule blanche puis une noire ou d'obtenir d'abord une boule noire puis une blanche, le nombre de cas favorables est $2 \times 3 \times k = 6k$
La probabilité que le joueur gagne la partie est égale à $\dfrac{6k}{(k+3)^2}$ donc $p\,(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

***b.*** Un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ; le nombre de cas favorables est donc $3^2$

donc $p\ (Y_k = -9) = \dfrac{9}{(k+3)^2}$.

un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ; le nombre de cas favorables est donc $k^2$

donc $p\ (Y_k = -1) = \dfrac{k^2}{(k+3)^2}$.

| $y$ | $-9$ | $-1$ | $5$ | Total |
|---|---|---|---|---|
| $P(Y_k = y)$ | $\dfrac{9}{(k+3)^2}$ | $\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$ | $\dfrac{6k}{(k+3)^2}$ | 1 |
| $y\ P(Y_k = y)$ | $-\dfrac{81}{(k+3)^2}$ | $-\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$ | $\dfrac{30k}{(k+3)^2}$ | $-\dfrac{k^2-30k+81}{(k+3)^2}$ |

**2.** $E(Y_k) = -\dfrac{k^2-30k+81}{(k+3)^2}$, pour tout $k \geq 2$, $(k+3)^2 > 0$ donc a le même signe que $-(k^2 - 30k + 81)$

$x^2 - 30x + 81$ admet deux solutions $x_1 = 3$ et $x_2 = 27$ donc :

| $k$ | 2 | | 3 | | 27 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E(Y_k)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive donc pour $3 < k < 27$