EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On prend 1 cm comme unité.

Partie A — Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées (x_D, y_D, z_D) et P le plan d'équation $a x + b y + c z + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.

Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par : $d(D,P) = \dfrac{|a x_D + b y_D + c z_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

On considère les points A de coordonnées (3 ; − 2 ; 2), B de coordonnées (6 ; − 2 ; − 1) , C de coordonnées (6 ; 1 ; 5) et D de coordonnées (4 ; 0 ; − 1).

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.

2. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; − 2 ; 1) est normal au plan (ABC). Déterminer une équation du plan (ABC).

3. Calculer la distance du point D au plan (ABC). Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).

2. Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.

Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (− 2) et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M’ d'affixe $z' = \dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}$.

1. *a.* Déterminer l'affixe du point P’ image par f du point P d'affixe (1 + i).

b. Montrer que les droites (AP) et (BP’) sont parallèles.

c. Etablir que les droites (AP) et (PP’) sont perpendiculaires.

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est à dire l'ensemble des points tels que M’= M).

On cherche à généraliser les propriétés **1.*b*** et **1.*c*** pour obtenir une construction de l'image M’ d'un point M quelconque du plan.

3. *a.* Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z - 2)(\overline{z} - 2)$ est réel.

b. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.

c. Montrer que les droites (AM) et (BM’) sont parallèles.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.*c***.

5. Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point M’ image de M par f . Réaliser une figure pour le point Q d'affixe 3 − 2 i.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA].

Γ_1 désigne le cercle de diamètre [AI] et Γ_2 désigne le cercle de diamètre [BK].

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que s(A) = I et s(B) = K.

2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.

3. *a.* Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.

b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés. (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A ; \dfrac{1}{10}\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.

2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe $z' = \dfrac{i}{2} z + 5 + 5\,i$.

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.

4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale : $I = \int_0^1 \left(\dfrac{e^{-x}}{2-x}\right) dx$

1. *a.* Étudier les variations de la fonction $f : x \rightarrow f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle [0 ; 1].

b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], on a $\dfrac{1}{e} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \int_0^1 (2+x)\, e^{-x}\, dx$ et $K = \int_0^1 x^2\, f(x)\, dx$.

a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \dfrac{4}{e}$.

b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que : $\dfrac{1}{3e} \leq K \leq \dfrac{1}{6}$.

c. Démontrer que J + K = 4 I .

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I , puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I .

EXERCICE 4 (4 points) Commun à tous les candidats

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « BB AAC » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. *a.* Combien y a t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des événements suivants :

E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « B AC AB » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \dfrac{32}{243}$.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

CORRECTION

EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A — Restitution organisée de connaissances

$\vec{n}$ $(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal au plan (P)

Soit H la projection orthogonale de D sur (P) alors (DH) a pour vecteur directeur $\vec{n}$ donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DH} = k\,\vec{n}$

La distance de D au plan (P) est égale à DH donc à $|k| \times \|\vec{n}\|$, il suffit donc de connaître k.

$$\overrightarrow{DH} = k\,\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - x_D = k\,a \\ y_H - y_D = k\,b \\ z_H - z_D = k\,c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = x_D + k\,a \\ y_H = y_D + k\,b \\ z_H = z_D + k\,c \end{cases}$$

H appartient à (P) donc $a\,x_H + b\,y_H + c\,z_H + d = 0$, soit $a\,(x_D + k\,a) + b\,(y_D + k\,b) + c\,(z_D + k\,c) + d = 0$

$k\,(a^2 + b^2 + c^2) = -(a\,x_D + b\,y_D + c\,z_D + d)$

donc $k = \dfrac{a\,x_D + b\,y_D + c\,z_D + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ donc DH = $|k| \times \|\vec{n}\|$ donc DH = $\dfrac{|a\,x_D + b\,y_D + c\,z_D + d\,|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

DH = $\dfrac{|a\,x_D + b\,y_D + c\,z_D + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Partie B

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (3 ; 0 ; – 3) donc $AB^2 = 3^2 + 0^2 + (-3)^2 = 18$ donc $AB = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (3 ; 3 ; 3) donc $AC^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$ donc $AC = 3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (0 ; 3 ; 6) donc $BC^2 = 0^2 + 3^2 + 6^2 = 45$

18 + 27 = 45 donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$, le triangle ABC est rectangle en A et son aire est égale à $\dfrac{1}{2} AB \times AC = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$

2. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 3 + (-2) \times 0 + 1 \times (-3) = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + (-2) \times 3 + 1 \times 3 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; − 2 ; 1) est normal au plan (ABC).

Une équation du plan (ABC) est donc de la forme $x - 2\,y + z + d = 0$.

C appartient au plan (ABC) donc $6 - 2 \times 1 + 5 + d = 0$ donc $d = -9$

Une équation du plan (ABC) est $x - 2\,y + z - 9 = 0$

3. $d = \dfrac{|x_D - 2\,y_D + z_D - 9\,|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{|4 - 2 \times 0 + (-1) - 9\,|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}}$

$d = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

Le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\dfrac{1}{3} A_{ABC} \times d$

$V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{9\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = 9$.

Partie C

1. Les plans Q et (ABC) ont le même vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; − 2 ; 1) donc sont parallèles.

2. E appartient à (DA) donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DE} = k\,\overrightarrow{DA}$.

donc si E est le point de coordonnées $(x\,;y;\,z)$ alors $\begin{cases} x - 4 = -k \\ y = -2\,k \\ z + 1 = 3\,k \end{cases}$

Donc E $\begin{cases} x = 4 - k \\ y = -2\,k \\ z = -1 + 3\,k \end{cases}$, E appartient au plan Q donc

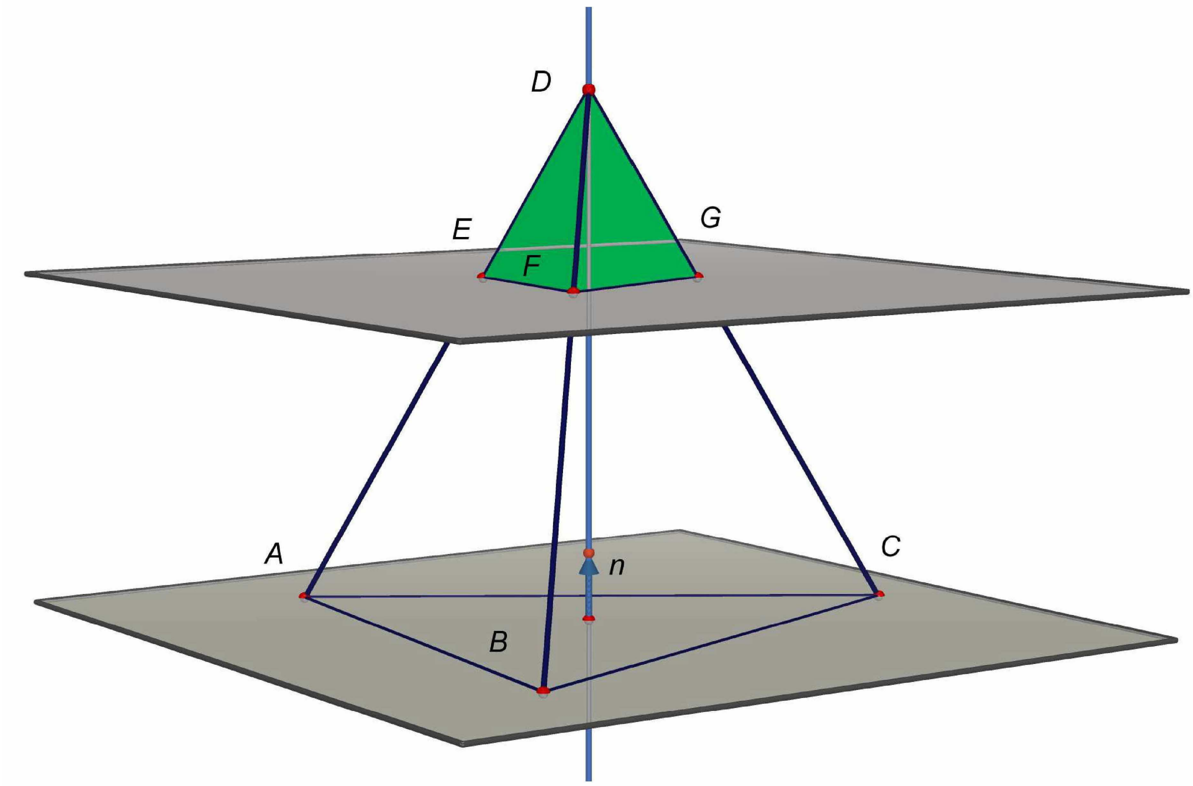
$(4 - k) - 2 \times (-2\,k) + (-1 + 3\,k) - 5 = 0$ donc $-2 + 6\,k = 0$ donc $k = \dfrac{1}{3}$

En remplaçant k par $\dfrac{1}{3}$, E a pour coordonnées $\left(\dfrac{11}{3}\,; -\dfrac{2}{3}\,; 0\right)$.

$\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ donc E appartient au segment [DA].

3. Le plan Q est aussi le plan (EFG). Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles donc le tétraèdre EFGD se déduit du tétraèdre ABCD par une homothétie de centre D de rapport $\dfrac{1}{3}$.

Le volume du tétraèdre EFGD est égal à $\dfrac{1}{27}\,V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}$.



EXERCICE 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* l'affixe du point P’ image par f du point P d'affixe (1 + i) est $z' = \dfrac{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}-2)}{1-\mathrm{i}-2} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{-1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{1+\mathrm{i}} = -\dfrac{2\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$z' = -(1+\mathrm{i})$

b. $\overrightarrow{AP}$ a pour affixe 1 + i – 2 = – 1 + i
$\overrightarrow{BP'}$ a pour affixe – 1 – i + 2 = 1 – i donc $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{BP'}$ donc les droites (AP) et (BP’) sont parallèles.

c. Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux donc que leur produit scalaire est nul.
$\overrightarrow{PP'}$ a pour affixe – 1 – i – 1 – i = – 2 – 2 i donc le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ a pour coordonnées (– 2 ; – 2)
$\overrightarrow{PP'}\,.\,\overrightarrow{AP} = -2\times(-1)+(-2)\times 1 = 0$ donc les droites (AP) et (PP’) sont perpendiculaires.

2. $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow z = \dfrac{\bar z\,(z-2)}{\bar z - 2} \Leftrightarrow z\,(\bar z - 2) = \bar z\,(z-2) \Leftrightarrow z\,\bar z - 2\,z = z\,\bar z - 2\,\bar z \Leftrightarrow z = \bar z \Leftrightarrow$ M décrit l'axe des réels privé de A (2)

3. *a.* $(z-2)(\bar z - 2) = (z-2)\,\overline{(z-2)} = |\,z-2\,|^2$ donc $(z-2)(\bar z - 2)$ est réel.

b. $z' + 2 = \dfrac{\bar z\,(z-2)}{\bar z - 2} + 2 = \dfrac{\bar z\,(z-2)+2\,\bar z - 4}{\bar z - 2} = \dfrac{z\,\bar z - 4}{\bar z - 2}$ donc $\dfrac{z'+2}{z-2} = \dfrac{z\,\bar z - 4}{(z-2)\,(\bar z - 2)}$

$z\,\bar z = |\,z\,|^2$ donc $\dfrac{z'+2}{z-2} = \dfrac{|\,z\,|^2 - 4}{|\,z-2\,|^2}$ donc pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.

c. $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z - 2$ et $\overrightarrow{BM'}$ a pour affixe $z' + 2$,
Comme $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel, il existe un réel k tel que $\dfrac{z'+2}{z-2} = k$ soit tel que $z' + 2 = k\,(z-2)$
donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BM'} = k\,\overrightarrow{AM}$ donc les droites (AM) et (BM’) sont parallèles.

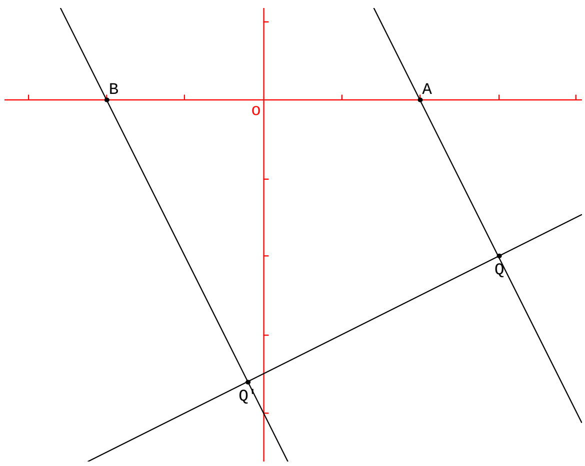
4. On désire donc montrer que pour tout point M non situé sur la droite (AB), les droites (AM) et (MM’) sont perpendiculaires.
$\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur d'affixe $z' - z = \dfrac{\bar z\,(z-2)}{\bar z - 2} - z = \dfrac{\bar z\,z - 2\,\bar z - z\,\bar z + 2\,z}{\bar z - 2} = \dfrac{2\,(z-\bar z)}{\bar z - 2}$

M appartient au plan privé de (AB) donc M n'appartient pas à l'axe des réels donc $z \neq \bar z$ donc $\dfrac{2\,(z-\bar z)}{\bar z - 2} \neq 0$

$(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{MM'}) = \arg \dfrac{\dfrac{2\,(z-\bar z)}{\bar z - 2}}{z-2}$ donc $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{MM'}) = \arg \dfrac{2\,(z-\bar z)}{(\bar z - 2)\,(z-2)}$ or $z - \bar z$ est un imaginaire pur et $(z-2)(\bar z - 2)$ est réel non nul

donc $\dfrac{2\,(z-\bar z)}{(\bar z - 2)\,(z-2)}$ est un imaginaire pur non nul donc $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{MM'}) = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; les droites (AM) et (MM’) sont perpendiculaires.

5. Si M appartient à (AB) alors f (M) = M donc M' = M (question 2).
Si M n'appartient pas à (AB) alors les droites (AM) et (MM’) sont perpendiculaires et les droites (AM) et (BM’) sont parallèles.
Pour construire M', il suffit donc de tracer la parallèle en B à (AM) et la perpendiculaire en M à (AM), leur point d'intersection est M'.



EXERCICE 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. **A**BCD est un carré donc IK = $\frac{1}{2}$ AD = $\frac{1}{2}$ AB donc AB = 2 IK

s a pour rapport $\frac{\text{IK}}{\text{AB}} = \frac{\text{IK}}{2\text{ IK}} = \frac{1}{2}$

s a pour angle $(\overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{IK}}) = (\overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AD}})$ donc s a pour angle $\frac{\pi}{2}$.

2. Le triangle AIJ est rectangle en J donc J $\in \Gamma_1$; le triangle BKJ est rectangle en J donc J $\in \Gamma_2$
Γ_1 et Γ_2 se coupent en J donc ont un second point d'intersection Ω.

Soit Ω' le centre de la similitude s, s est une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ telle que s(A) = I et s(B) = K

s(A) = I donc $(\overrightarrow{\Omega'\text{A}}, \overrightarrow{\Omega'\text{I}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc Ω' appartient au cercle Γ_1 de diamètre [AI]

s(B) = K donc $(\overrightarrow{\Omega'\text{B}}, \overrightarrow{\Omega'\text{K}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc Ω' appartient au cercle Γ_2 de diamètre [BK]

Ω' est donc un point de l'intersection de Γ_1 et Γ_2 donc soit Ω' = J soit Ω' = Ω

$(\overrightarrow{\text{JA}}, \overrightarrow{\text{JI}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc Ω' ≠ J donc Ω' = Ω

3. *a.* Une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme la droite (AC) en une droite perpendiculaire passant par s(A) donc par I.
I est le centre du carré ABCD et les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires en I donc s((AC)) = (BD).
De même s transforme (BC) en en une droite perpendiculaire passant par s(B) donc par K donc s((BC)) = (CD).

C est le point d'intersection des droites (AC) et (BC) donc s(C) est le point d'intersection de s((AC)) et s((BC)) donc de (BD) et (CD) donc s(C) = D.

b. I est le milieu de [AC] et une similitude conserve les milieux donc s(I) est le milieu du segment [s(A) s(C)] soit E est le milieu du segment [ID].

4. $s \circ s$ est la composée de deux similitudes directes de même centre Ω donc $s \circ s$ est une similitude directe d'angle la somme des angles des deux similitudes soit π et de centre Ω.
$s \circ s$ (A) = s [s(A)] = s (I) = E donc $(\overrightarrow{\Omega\text{A}}, \overrightarrow{\Omega\text{E}}) = \pi + 2k\pi$ ($k \in$ Z) donc les points A, Ω et E sont alignés.

Partie B

1. A est le point d'affixe 0 ; $\overrightarrow{\text{AB}} = 10 \times \left(\frac{1}{10}\overrightarrow{\text{AB}}\right)$ donc B a pour coordonnées (10 ; 0) donc pour affixe 10

$\overrightarrow{\text{AD}} = 10 \times \left(\frac{1}{10}\overrightarrow{\text{AD}}\right)$ donc D a pour coordonnées (0 ; 10) donc pour affixe 10 i

$\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}}$ donc C a pour affixe 10 + 10 i

2. I est le milieu de [AC] donc a pour affixe 5 + 5 i
s est une similitude directe donc a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$
s(A) = I donc 5 + 5 i = b donc s a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + 5 + 5\text{ i}$

K est le milieu de [CD] donc a pour affixe $\frac{1}{2}(z_{\text{C}} + z_{\text{D}}) = 5 + 10\text{ i}$

s(B) = K donc 5 + 10 i = 10 a + 5 + 5 i donc 10 a = 5 i soit $a = \frac{\text{i}}{2}$ donc s a pour écriture complexe $z' = \frac{\text{i}}{2} z + 5 + 5\text{ i}$.

3. Ω est l'unique point invariant de s donc $\omega = \frac{\text{i}}{2}\omega + 5 + 5\text{ i}$ soit $(2 - \text{i})\,\omega = 10 + 10\text{ i}$

$\omega = 10\,\frac{1+\text{i}}{2-\text{i}} = 10\,\frac{(1+\text{i})(2+\text{i})}{(2-\text{i})(2+\text{i})} = 2\,(2 + \text{i} + 2\text{ i} + \text{i}^2) = 2\,(1 + 3\text{ i})$ donc $\omega = 2 + 6\text{ i}$

4. Calculer l'affixe z_{E} du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

$s(\mathrm{I}) = \mathrm{E}$ donc $z_{\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}(5 + 5\,\mathrm{i}) + 5 + 5\,\mathrm{i} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{15}{2}\mathrm{i}$

$\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega}$ a pour affixe $2 + 6\,\mathrm{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ a pour affixe $\dfrac{5}{2} + \dfrac{15}{2}\mathrm{i}$ or $\dfrac{5}{2} + \dfrac{15}{2}\mathrm{i} = \dfrac{5}{2}(1 + 3\,\mathrm{i})$ or $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{2}(1 + 3\,\mathrm{i}) = 2 + 6\,\mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

Les points A, Ω et E sont alignés.

5. Les points A, Ω et E sont alignés donc il suffit de montrer que Ω , C, L d'une part et Ω, D, J d'autre part sont alignés.

$\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}$ a pour affixe $10 + 10\,\mathrm{i} - (2 + 6\,\mathrm{i}) = 8 + 4\,\mathrm{i}$

$\overrightarrow{\Omega\mathrm{L}}$ a pour affixe $5\,\mathrm{i} - (2 + 6\,\mathrm{i}) = -2 - \mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}} = -4\,\overrightarrow{\Omega\mathrm{L}}$ donc Ω , C, L sont alignés.

$\overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}$ a pour affixe $10\,\mathrm{i} - (2 + 6\,\mathrm{i}) = -2 + 4\,\mathrm{i} = -2(1 - 2\,\mathrm{i})$

$\overrightarrow{\Omega\mathrm{J}}$ a pour affixe $5 - (2 + 6\,\mathrm{i}) = 3 - 6\,\mathrm{i} = 3(1 - 2\,\mathrm{i})$ donc $\overrightarrow{\Omega\mathrm{J}} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}$ donc Ω, D, J sont alignés.

Les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

1. *a.* $f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}(2-x)-(-1)\mathrm{e}^{-x}}{(2-x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}$. La fonction exponentielle est strictement positive, sur [0 ; 1], $x - 1 \leq 0$

x	0	1
$f'(x)$	$-$	0
f	0,5 ↘	e^{-1}

b. f est strictement décroissante sur [0 ; 1]donc pour tout x de [0 ; 1], $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$ donc pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $\mathrm{J} = \int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Soit $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ alors $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
$v(x) = 2 + x$ donc $v'(x) = 1$

$\mathrm{J} = \left[-(2+x)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -3\mathrm{e}^{-1} + 2 - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -3\mathrm{e}^{-1} + 2 - \mathrm{e}^{-1} + 1 = -4\mathrm{e}^{-1} + 3 = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

b. Pour tout x de [0 ; 1], $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}}x^2 \leq x^2 f(x) \leq \dfrac{1}{2}x^2$

Les fonctions $x \to \dfrac{1}{\mathrm{e}}x^2$; $x \to x^2 f(x)$ et $x \to \dfrac{1}{2}x^2$ sont continues sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 \dfrac{1}{\mathrm{e}}x^2\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$

soit $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x \leq \mathrm{K} \leq \dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$

or $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$ donc en remplaçant : $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leq \mathrm{K} \leq \dfrac{1}{6}$.

c. $\mathrm{J} + \mathrm{K} = \int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left[(2+x)\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1\left[\dfrac{4\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right]\mathrm{d}x = 4\int_0^1\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right)\mathrm{d}x$

donc J + K = 4 I.

d. $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leq \mathrm{K} \leq \dfrac{1}{6}$ donc $3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leq \mathrm{J} + \mathrm{K} \leq \dfrac{1}{6} + 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$. soit $3 - \dfrac{11}{3\mathrm{e}} \leq 4\,\mathrm{I} \leq \dfrac{19}{6} - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$

$\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\,\mathrm{e}} \leq \mathrm{I} \leq \dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc $0{,}41 \leq \mathrm{I} \leq 0{,}43$

EXERCICE 4 (4 points) Commun à tous les candidats

1. *a.* Pour chaque question, il existe 3 réponses donc pour les 5 questions il existe 3^5 mots-réponses possible à ce questionnaire.

b. On une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes (répondre à une question)
Chacune d'elles a deux issues :

- la réponse est exacte ($p = \frac{1}{3}$)
- la réponse est inexacte ($q = \frac{2}{3}$)

donc la variable aléatoire comptant le nombre de réponses exactes suit une loi binomiale de paramètres ($5 ; \frac{1}{3}$)

$p(\text{E}) = p(\text{X} = 1) = 0{,}329218107$

$p(\text{F}) = p(\text{X} = 0) = \frac{32}{243}$

On pouvait aussi détailler :
Si une seule réponse est exacte alors soit le candidat a bien répondu à la première question et s'est trompé aux 4 autres réponses (1×2^4 cas favorables) de même il peut avoir bien répondu à la deuxième question et s'être trompé aux 4 autres réponses (1×2^4 cas favorables) donc le nombre total de cas favorables est $5 \times 2^4 = 80$

$p(\text{E}) = p(\text{X} = 1) = \frac{80}{243}$

Si aucune réponse n'est exacte, le candidat a répondu faux à chaque question, le nombre de cas favorables est donc $2^5 = 32$

$p(\text{F}) = \frac{32}{243}$

Les palindromes possibles sont :

A A A A A	B A A A B	C A A A C
A A B A A	B A B A B	C A B A C
A A C A A	B A C A B	C A C A C
A B A B A	B B A B B	C B A B C
A B B B A	B B B B B	C B B B C
A B C B A	B B C B B	C B C B C
A C A C A	B C A C B	C C A C C
A C B C A	B C B C B	C C B C C
A C C C A	B C C C B	C C C C C

On a donc 9×3 palindromes donc $p(\text{G}) = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{9}$

2. *a.* On une succession de 28 expériences aléatoires identiques et indépendantes (répondre au questionnaire)
Chacune d'elles a deux issues :

- le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte ($p = \frac{32}{243}$).
- le mot-réponse comporte au moins une réponse exacte ($q = 1 - p$).

donc la variable aléatoire comptant le nombre de réponses exactes suit une loi binomiale de paramètres ($28 ; \frac{32}{243}$)

b. $p\ (\text{X} \leq 1) = p(\text{E}) + p((\text{F}) = \frac{112}{243} \approx 0{,}46$