Intersection d'un plan et d'une pyramide

Dans l'espace muni du repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on considère les points A(4 ; 0 ; 0), B(2 ; 4 ; 0), C(0 ; 6 ; 0), S(0 ; 0; 4), E(6 ; 0 ; 0) et F(0 ; 8 ; 0).

1. Réaliser une figure comportant les points définis dans l'exercice que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Démontrer que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA).
3. On admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC).

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ (4 ; 3 ; 6) est un vecteur normal au plan (SED). En déduire une équation cartésienne de ce plan.
b. Calculer les coordonnées du point A' barycentre des points pondérés (A, 1) et (S, 3).
c. On considère le plan P parallèle au plan (SED passant par A'. Vérifier qu'une équation cartésienne de P est :

$$4x + 3y + 6z - 22 = 0.$$

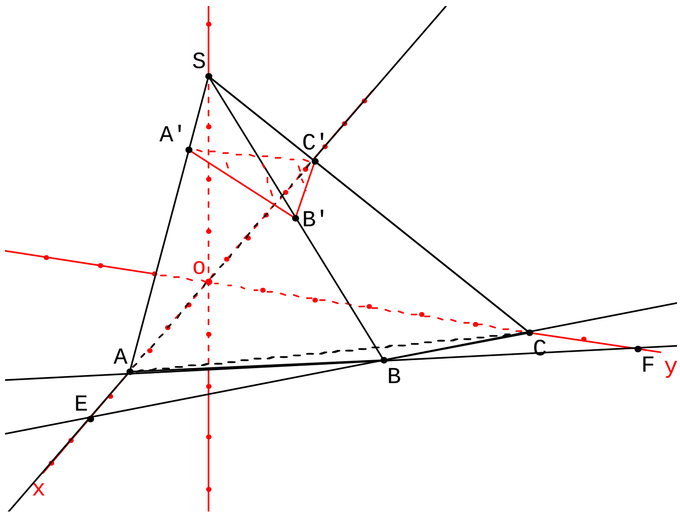
4. Le plan P coupe les arêtes [SO], [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement aux points O', A', B' et C'.

a. Déterminer les coordonnées de O'.
b. Vérifier que C' a pour coordonnées $\left(0\,;2\,;\frac{8}{3}\right)$.
c. Déterminer les coordonnées du point B'.

5. Vérifier que O'A'B'C' est un parallélogramme.

CORRECTION

1.



2. $\overrightarrow{OE} = 6\vec{i} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ donc E ∈ (OA)

$\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées (– 4 ; 4 ; 0)
$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (– 2 ; 2 ; 0)
donc $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{BC}$ donc E ∈ (BC)
E est le point d'intersection de (OA) et (BC)

3. *a.* $\overrightarrow{SE}$ a pour coordonnées (6 ; 0 ; – 4)
$\vec{n}.\overrightarrow{SE} = 4 \times 6 + 3 \times 0 - 6 \times 4 = 0$

$\overrightarrow{SF}$ a pour coordonnées (0 ; 8 ; – 4)
$\vec{n}.\overrightarrow{SF} = 4 \times 0 + 3 \times 8 - 6 \times 4 = 0$
donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{SE}$ et à $\overrightarrow{SF}$
(SE) et (SF) sont sécantes donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (SEF).
Une équation de ce plan est donc de la forme :
$4x + 3y + 6z + d = 0$
E ∈ (SEF) donc $4 \times 6 + 0 + 0 + d = 0$ donc $d = -24$
(SEF) a pour équation $4x + 3y + 6z - 24 = 0$

3. *b.* A' est le barycentre de {(A , 1) ; (S , 3)} donc $(1 + 3)\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OS}$ donc $4x_{A'} = 4$; $4y_{A'} = 0$; $4z_{A'} = 3 \times 4$
A' a pour coordonnées (1 ; 0 ; 3)

3. *c.* P est parallèle à (SEF) donc *a* une équation de la forme $4x + 3y + 6z + d = 0$
A' ∈ P donc $4 \times 1 + 3 \times 0 + 6 \times 3 + d = 0$ soit $d = -22$
P a pour équation $4x + 3y + 6z - 22 = 0$

4. O' ∈ (SO) or les points de (SO) ont des coordonnées de la forme (0 ; 0 ; *z*)
O' ∈ P donc $6z - 22 = 0$ soit $z = \frac{11}{3}$ donc O' a pour coordonnées $\left(0\,;0\,;\frac{11}{3}\right)$

4. *b.* C' ∈ (SC) donc $\overrightarrow{SC'} = k\,\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{SC}$ a pour coordonnées (0 ; 6 ; – 4) donc C' a pour coordonnées $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6k \\ z = -4k + 4 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

C' ∈ P donc $4 \times 0 + 3(-6k) + 6 \times (-4k + 4) - 22 = 0$

$-6k + 2 = 0$ donc $k = \frac{1}{3}$ donc en remplaçant dans $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6k \\ z = -4k + 4 \end{cases}$, C' a pour coordonnées $\left(0\,;2\,;\frac{8}{3}\right)$.

4. *c*. B’ $\in$ (SB) donc $\overrightarrow{SB'} = k\,\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SB}$ a pour coordonnées (2 ; 4 ; – 4) donc B’ a pour coordonnées $\begin{cases} x = 2\,k \\ y = 4\,k \\ z = -\,4\,k + 4 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

B’ $\in$ P donc $4 \times 2\,k + 3 \times 4\,k + 6 \times (-\,4\,k + 4) - 22 = 0$

$-\,4\,k + 2 = 0$ donc $k = \frac{1}{2}$ donc en remplaçant dans $\begin{cases} x = 2\,k \\ y = 4\,k \\ z = -\,4\,k + 4 \end{cases}$, B’ a pour coordonnées (– 1 ; 2 ; 2).

5. O’ a pour coordonnées $\left(0\,;0\,;\frac{11}{3}\right)$; A’ a pour coordonnées (1 ; 0 ; 3) donc $\overrightarrow{O'A'}$ a pour coordonnées $\left(1;0\,;\frac{-\,2}{3}\right)$.

C’ a pour coordonnées $\left(0\,;2\,;\frac{8}{3}\right)$; B’ a pour coordonnées (– 1 ; 2 ; 2) donc $\overrightarrow{C'B'}$ a pour coordonnées $\left(1;0\,;\frac{-\,2}{3}\right)$.

donc $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{C'B'}$ donc O’A’B’C’ est un parallélogramme.