Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2007

1. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = a\,y$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = a\,y$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,e^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a\,y$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2\,y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2\,y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

CORRECTION

1. *a.* $f(x) = e^{ax}$ donc $f'(x) = a\,e^{ax}$ soit $f'(x) = a\,f(x)$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = a\,y$.

1. *b.* $h(x) = g(x)\,e^{-ax}$; h est le produit de deux fonctions donc il faut appliquer que $(u\,v)' = u'\,v + v'\,u$ avec :

$u(x) = g(x)$ $\quad u'(x) = g'(x)$

$v(x) = e^{-ax}$ $\quad v'(x) = -a\,e^{-ax}$

donc $h'(x) = g'(x)\,e^{-ax} - g(x)\,a\,e^{-ax} = [g'(x) - a\,g(x)]\,e^{-ax}$

or g une solution de l'équation $y' = a\,y$ donc $g'(x) = a\,g(x)$ d'où $g'(x) - a\,g(x) = 0$

on en déduit que $h'(x) = 0$ donc h est une fonction constante.

1. *c.* Si g est une solution de l'équation $y' = a\,y$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,e^{-ax}$, alors h est une fonction constante donc il existe un réel k tel que $h(x) = k$ d'où $g(x)\,e^{-ax} = k$ donc $g(x) = k\,e^{ax}$.

Les solutions de l'équation $y' = a\,y$ sont les fonctions de la forme $k\,e^{ax}$ avec k réel.

2. *a.* f_0 est solution de (E) donc $f_0'(x) = 2\,f_0(x) + \cos x$

$f_0'(x) = -a\sin x + b\cos x$ donc pour tout x réel, $-a\sin x + b\cos x = 2\,(a\cos x + b\sin x) + \cos x$

pour tout x réel, $-a\sin x + b\cos x = (2\,a + 1)\cos x + 2\,b\sin x$

Cette égalité est vraie pour tout x réel donc en particulier pour $x = 0$, et pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.

pour $x = 0$, $\cos x = 1$ et $\sin x = 0$ donc $b = 2\,a + 1$

pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos x = 0$ et $\sin x = 1$ donc $-a = 2\,b$

On obtient donc le système $\begin{cases} b = 2\,a + 1 \\ -a = 2\,b \end{cases}$ donc $b = -4\,b + 1$ soit $b = \dfrac{1}{5}$ donc $a = -2\,b = -\dfrac{2}{5}$

$f_0(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$ est solution de (E).

2. *b.* Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2\,y$ sont les fonctions de la forme $f(x) = k\,e^{2x}$ avec k réel.

2. *c.* $f - f_0$ est solution de (E_0) $\Leftrightarrow (f - f_0)' = 2(f - f_0) \Leftrightarrow f' - f_0' = 2\,f - 2\,f_0 \Leftrightarrow f' = 2\,f + f_0' - 2\,f_0$

or $f_0'(x) = 2\,f_0(x) + \cos x$ soit $f_0'(x) - 2\,f_0(x) = \cos x$

$f - f_0$ est solution de (E_0) $\Leftrightarrow f' = 2\,f + \cos x \Leftrightarrow f$ solution de (E)

2. *d.* f solution de (E) $\Leftrightarrow f - f_0$ est solution de (E_0) $\Leftrightarrow f(x) - f_0(x) = k\,e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = C\,e^{2x} + f_0(x)$ où C est un réel

f solution de (E) $\Leftrightarrow f(x) = C\,e^{2x} - \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$.

2. *e.* k est solution de (E) donc il existe un réel C tel que pour tout x réel, $k(x) = C\,e^{2x} - \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$.

$k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ donc en tenant compte que $\cos x = 0$ et $\sin x = 1$, $C\,e^{\pi} + \dfrac{1}{5} = 0$ donc $C = -\dfrac{1}{5}e^{-\pi}$

donc $k(x) = -\dfrac{1}{5}e^{2x-\pi} - \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$.