Dans chacun des exercices, il s’agit de calculer l’intégrale donnée.

EXERCICE 1

a. $\quad \text{I} = \displaystyle\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $\text{F}(x) = \ln |\, x \,|$

$\text{I} = \ln \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln \sqrt{2} - \ln 2$

$\text{I} = \dfrac{1}{2} \ln 2 - \ln 2$

$\text{I} = -\dfrac{1}{2} \ln 2.$

b. $\quad \text{J} = \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x}{x^2+5} \,\mathrm{d}\, x$

$u(x) = x^2 + 5$

$u'(x) = 2\,x$ donc $x = \dfrac{1}{2}\, u'(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc $\text{F}(x) = \dfrac{1}{2} \ln |\, u(x) \,|$

or $x^2 + 5 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc :

$\text{F}(x) = \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + 5)$

$\text{J} = \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x}{x^2+5} \,\mathrm{d}\, x = \text{F}(2) - \text{F}(-2)$

$\text{J} = 0$

EXERCICE 2

a. $\quad \text{I} = \displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{x+1} \,\mathrm{d}\, x$

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ donc $\text{F}(x) = \ln |\, x + 1 \,|$

$\text{I} = \ln 4 - \ln 1$

$\text{I} = 2 \ln 2.$

b. $\quad \text{J} = \displaystyle\int_0^{2} \frac{x^2}{x^3+1} \,\mathrm{d}\, x$

$u(x) = x^3 + 5$

$u'(x) = 3\,x^2$ donc $x = \dfrac{1}{3}\, u'(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{3} \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc $\text{F}(x) = \dfrac{1}{3} \ln |\, u(x) \,|$

$\text{J} = \displaystyle\int_0^{2} \frac{x^2}{x^3+1} \,\mathrm{d}\, x = \text{F}(2) - \text{F}(0)$

$\text{J} = \dfrac{1}{3} \ln 13 - \dfrac{1}{3} \ln 5.$

EXERCICE 3

a. $\quad \text{I} = \displaystyle\int_1^{e} \left(\frac{1}{x} + 1\right) \mathrm{d}\, x$

$\text{I} = \big[\ln |x|\big]_1^{e} = \ln e - \ln 1$

$\text{I} = 1.$

b. $\quad \text{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \,\mathrm{d}\, x$

$f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$u(x) = \cos x$

$u'(x) = -\sin x$

$f(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc $\text{F}(x) = -\ln |\, u(x) \,|$

$\text{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \,\mathrm{d}\, x = \text{F}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{F}(0)$

$\text{F}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\ln \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\ln \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \ln 2$

$\text{F}(0) = -\ln \cos 0 = 0$

$\text{J} = \dfrac{1}{2} \ln 2.$

Session de remplacement, 1990

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1. Calculer: $\quad \text{I}_1 = \displaystyle\int_0^{1} f(x) \,\mathrm{d}\, x$.

$u(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 2\,x$ donc $x = \dfrac{1}{2}\, u'(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc une primitive de f est F : $\text{F}(x) = \dfrac{1}{2} \ln |\, u(x) \,|$

$u(x) > 0$ donc $\text{F}(x) = \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + 1)$

$\text{I}_1 = \text{F}(1) - \text{F}(0)$

$\text{I}_1 = \dfrac{1}{2} \ln 2$

2. Soit $\text{I}_2 = \displaystyle\int_0^{1} g(x) \,\mathrm{d}\, x$ Calculer $\text{I}_1 + \text{I}_2$ et en déduire la valeur de I_2.

$\text{I}_1 + \text{I}_2 = \displaystyle\int_0^{1} f(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_0^{1} g(x) \,\mathrm{d}\, x$

$\text{I}_1 + \text{I}_2 = \displaystyle\int_0^{1} [\, f(x) + g(x) \,] \,\mathrm{d}\, x$

or $f(x) + g(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x\,(1+x^2)}{1+x^2} = x$

donc

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$$

donc $\frac{1}{2}\ln 2 + I_2 = \frac{1}{2}$

$$I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Algérie, 1985
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x-7}{x^2-2x-3}.$$

Déterminer les nombres réels α et β tels que, pour tout x élément de l'ensemble de définition de f,

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}.$$

$$f(x) - \frac{2x-2}{x^2-2x-3} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}.$$

$$\frac{-5}{x^2-2x-3} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{(\alpha+\beta)x+\beta-3\alpha}{(x+1)(x-3)}$$

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{(\alpha+\beta)x+\beta-3\alpha}{x^2-2x-3}$$

donc $\frac{(\alpha+\beta)x+\beta-3\alpha}{x^2-2x-3} = \frac{-5}{x^2-2x-3}$

donc $\alpha + \beta = 0$ et $\beta - 3\alpha = -5$

donc $\alpha = \frac{5}{4}$ et $\beta = -\frac{5}{4}$

donc $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{x+1} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{x-3}$

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]3\,;+\infty[$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

$F(x) = \ln|x^2-2x-3| + \frac{5}{4}\ln|x+1| - \frac{5}{4}\ln|x-3| + k$ où k est un réel quelconque.

$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$
$x > 3$ donc $x^2 - 2x - 3 > 0$, $x + 1 > 0$ et $x - 3 > 0$
donc

$$F(x) = \ln(x^2-2x-3) + \frac{5}{4}\ln(x+1) - \frac{5}{4}\ln(x-3) + k$$

$$F(x) = \ln(x^2-2x-3) + \frac{5}{4}[\ln(x+1) - \ln(x-1)] + k$$

$$F(x) = \ln(x^2-2x-3) + \frac{5}{4}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + k$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2x - 3 = +\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-2x-3) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

EXERCICE 3
Soit la fonction f définie sur ∈ $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que,

pour tout $x \in\ ]0, +\infty[$ $\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} = \frac{a(1+x)^2 + bx(1+x) + cx}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(1+x)^2} = \frac{1}{x(1+x)^2}$$

il faut donc que $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ c=1 \end{cases}$

donc $c = 1$, $a = -1$ et $b = 1$

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Soit $X > 0$.

a. Calculer $J = \int_1^X \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx$

Une primitive de f est g :

$$g(x) = -\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1}$$

$X > 0$ donc $J = -\ln X + \ln(X+1) - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2} - \ln 2$

b. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(X) = \int_1^X \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx$$

est la primitive nulle en 1 de f.

si $X > 0$, $F(X) = g(X) + + \frac{1}{2} - \ln 2$

donc F est une primitive de f
$F(1) = 0$
donc la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(X) = \int_1^X \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx$$

est la primitive nulle en 1 de f.

National, 1995
L'objectif est de calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur [0, 1] par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2}).$$

a. Calculer la dérivée de la fonction $x \to \sqrt{x^2+2}$.

La dérivée de $x \to \sqrt{x^2+2}$ est la fonction $x \to \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

b. En déduire la dérivée f' de f.

soit $u(x) = x + \sqrt{x^2+2}$,

$u'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x^2+2}}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x^2+2}} \times \dfrac{1}{u(x)}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

donc f est une primitive de $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

c. Calculer la valeur de I.

$I = f(1) - f(0) = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$

2. Calcul de J et K

a. Sans calculer explicitement J et K, vérifier que :

$$J + 2I = K.$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

$J + 2I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$J + 2I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

or $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2}$ donc

$J + 2I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = K$

b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$. (Admettre ce résultat)

c. En déduire les valeurs de J et de K.

$J + 2I = K$ or $K = \sqrt{3} - J$.

donc $J + 2I = \sqrt{3} - J$ soit $2J = \sqrt{3} - 2I$

$J = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - I$ or $I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$

donc :

$J = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2}$

Nancy-Metz, 1980

On considère la fonction numérique de la variable réelle f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

a. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, qui *a* même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.

$P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

$P(0) = f(0) = 1$ donc $d = 1$

$P(1) = f(1) = \dfrac{1}{2}$ donc $a + b + c = -\dfrac{1}{2}$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$P'(0) = f'(0) = -1$ donc $c = -1$

$P'(1) = f'(1) = -\dfrac{1}{4}$ donc $3a + 2b + c = -\dfrac{1}{4}$

soit le système :

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = -\dfrac{1}{4} \\ a + b + c = -\dfrac{1}{2} \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} 3a + 2b = \dfrac{3}{4} \\ a + b = \dfrac{1}{2} \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$

soit $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{3}{4}$, $c = -1$, $d = 1$

$P(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - x + 1$

b. Soit k la fonction numérique définie par

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1.$$

Factoriser k et en déduire la position relative de C_f et C_P, courbes représentatives respectives de f et P, dans un même repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) orthonormé du plan.

$k(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + x - 1$

$k(x) = \dfrac{1 + (x-1)(x+1)}{1+x} + \dfrac{1}{4}(x^3 - 3x^2)$

$k(x) = \dfrac{x^2}{1+x} + \dfrac{1}{4}x^2(x-3)$

$k(x) = \dfrac{x^2}{4(1+x)}(4 + x - 3) = \dfrac{x^2}{4}$

c. À l'aide d'un encadrement de $1 + x$ pour $x \in [0, 1]$ montrer que :

$$\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,dx < \frac{1}{120}$$.(Admettre ce résultat)

$d.$ Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x$.

$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln|1+x|\right]_0^1 = \ln 2$

$\int_0^1 \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1$

$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1$

$= \frac{-1+4-8+16}{16} = \frac{11}{16}$

$e.$ Déduire des résultats précédents la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que $\frac{n}{240} < \ln 2 < \frac{n+1}{240}$.

$k(x) = f(x) - \mathrm{P}(x)$

or $\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{120}$

donc $\frac{1}{240} < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{120}$

soit $\frac{1}{240} < \ln 2 - \frac{11}{16} < \frac{1}{120}$

$\frac{1}{240} + \frac{11}{16} < \ln 2 < \frac{11}{16} + \frac{1}{120}$

$\frac{166}{240} < \ln 2 < \frac{167}{240}$

donc $n = 166$

Règles utilisées :

$\ln(e^x) = x$

$e^{\ln x} = x$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$(e^a)^b = e^{ab}$

EXERCICE 1 *p* 158

$a.$ $\ln(e^{-2}) = -2$

en utilisant que $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$:

$e^{-\ln 3} = \frac{1}{e^{\ln 3}} = \frac{1}{3}$

ou encore en utilisant que $-\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$:

$e^{-\ln 3} = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = 3$

$b.$ en utilisant que $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$e^{\ln 3 - \ln 2} = \frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 2}} = \frac{3}{2}$

ou encore en utilisant que $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$\ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$e^{\ln 3 - \ln 2} = e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2}$

$\frac{e^{3\ln 2}}{e^{\ln 5}} = \frac{e^{\ln 2^3}}{e^{\ln 5}} = \frac{e^{\ln 8}}{e^{\ln 5}} = \frac{8}{5}$ en utilisant que $n \ln a = \ln a^n$.

EXERCICE 2 *p* 158

$a.$ $\ln(2e^3) = \ln 2 + \ln(e^3) = \ln 2 + 3$

en utilisant que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

en utilisant que $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$\frac{e^{2+\ln 3}}{e^{1-2\ln 3}} = e^{2+\ln 3-(1-2\ln 3)} = e^{1+3\ln 3}$

en utilisant que $e^{a+b} = e^a \times e^b$

$\frac{e^{2+\ln 3}}{e^{1-2\ln 3}} = e^1 \times e^{3\ln 3} = e \times e^{\ln(3^3)} = e \times e^{\ln 27}$

$\frac{e^{2+\ln 3}}{e^{1-2\ln 3}} = 27\,e.$

$b.$ en utilisant que $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

$\ln\left(\sqrt{e^5}\right) = \frac{1}{2}\ln(e^5) = \frac{5}{2}$.

$\ln e^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

EXERCICE 3 *p* 158

$a.$ $e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$

$\frac{e^{5x}}{e^{3x+2}} = e^{5x-(3x+2)} = e^{2x-2}$

$b.$ $\ln(e^{-2x}) = -2x$

$e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

EXERCICE 4 *p* 158

$a.$ $(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2$

$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}$ or $e^{x-x} = e^0 = 1$

$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$

de même :

$(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$

donc :

$(e^x - e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$

$(e^x - e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 = 2e^{2x} + 2e^{-2x}$

EXERCICE 5 *p* 158

$a.$ on peut démontrer de deux façons :

$\ln(e^x + e^{-x}) = \ln\left[e^x\left(1 + \frac{e^{-x}}{e^x}\right)\right]$

$= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x})$

$= x + \ln(1 + e^{-2x})$

autre méthode :

$x + \ln(1 + e^{-2x}) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x})$
$= \ln\left[e^x\left(1 + e^{-2x}\right)\right]$
$= \ln(e^x + e^x \times e^{-2x})$
$= \ln(e^x + e^{x-2x})$
$= \ln(e^x + e^{-x})$

b. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{e^{-x}}{e^x}\right)}$

$= \dfrac{1 - e^{-x-x}}{1 + e^{-x-x}}$

$= \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

EXERCICE 6 *p* 158
a. $x + \ln(1 + e^{-x}) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x})$
$= \ln[e^x(1 + e^{-x})]$
$= \ln(e^x + e^{x-x})$
$= \ln(e^x + 1)$

b. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

c. $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{1}{e^{2x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

EXERCICE 21 *p* 158
a. $e^x = 3$ donc $x = \ln 3$
b. $e^x = -3$ impossible, une exponentielle est toujours positive.
c. $e^x = \dfrac{1}{2}$ donc $x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$
d. $e^{x^2} = 2$ donc $x^2 = \ln 2$
$x = \sqrt{\ln 2}$ ou $x = -\sqrt{\ln 2}$.

EXERCICE 22 *p* 158
a. $\ln x = 2$ donc $x = e^2$
b. $\ln(x^2 - 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = e$
$\Leftrightarrow x^2 = e + 1$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{e+1}$ ou $x = -\sqrt{e+1}$

EXERCICE 23 *p* 158
a. $e^{2x-1} = e^{3-2x} \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 - 2x$
$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

b. $e^{x^2+7} = e^{-3x+5} \Leftrightarrow x^2 + 7 = -3x + 5$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -2$

EXERCICE 24 *p* 158
a. $e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x$
$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b. $e^{x^2} \times e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+2x} = 1$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

EXERCICE 25 *p* 158
a. $e^{2x} + e^{-2x} = -1$ impossible une exponentielle est toujours strictement positive donc la somme $e^{2x} + e^{-2x}$ est strictement positive.

b. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^{x^2} \times e = e^{2x}$
$\Leftrightarrow e^{x^2+1} = e^{2x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$

Centres étrangers 1996

1\. *a.* $\mathrm{I}(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 x(\ln x)^2\, \mathrm{d}x$

$u'(x) = x \qquad u(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

$v(x) = (\ln x)^2 \qquad v'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}$

$\mathrm{I}(\alpha) = \left[\dfrac{1}{2}x^2(\ln x)^2\right]_\alpha^1 - \displaystyle\int_\alpha^1 x\ln x\, \mathrm{d}x$

$\mathrm{I}(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \displaystyle\int_\alpha^1 x\ln x\, \mathrm{d}x$.

1\. *b.* $\mathrm{J}(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 x\ln x\, \mathrm{d}x$

$u'(x) = x \qquad u(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

$v(x) = \ln x \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$\mathrm{J}(\alpha) = \left[\dfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_\alpha^1 - \displaystyle\int_\alpha^1 \dfrac{1}{2}x\, \mathrm{d}x$

$\mathrm{J}(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \left[\dfrac{1}{4}x^2\right]_\alpha^1$.

$\mathrm{J}(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\alpha^2\right)$

$\mathrm{J}(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\alpha^2$

$\mathrm{I}(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \mathrm{J}(\alpha)$

$\mathrm{I}(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\alpha^2$.

c. $\mathrm{I}(\alpha) = -\dfrac{1}{2}(\alpha\ln\alpha)^2 + \dfrac{1}{2}\alpha^2\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\alpha^2$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha\ln\alpha = 0$ et $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^2\ln\alpha = 0$

donc $\lim\limits_{\alpha\to 0} \mathrm{I}(\alpha) = \dfrac{1}{4}$

2\. *a.* $\mathrm{S}_k(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 f_k(x)\, \mathrm{d}x$

$S_k(\alpha) = \int_\alpha^1 x(\ln x)^2 \, dx + \int_\alpha^1 kx \, dx$

$S_k(\alpha) = I(\alpha) + k\int_\alpha^1 x \, dx$

$S_k(\alpha) = I(\alpha) + k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^1$

$S_k(\alpha) = I(\alpha) + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k\alpha^2$

$\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha) = \frac{1}{4}$ donc $\lim\limits_{\alpha \to 0} S_k(\alpha) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k$

$S_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k$.

b. Le carré OILJ a pour aire 1 *u.a*.
L'aire limitée par la courbe C_0, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$ est $S_0 = \frac{1}{4}$.
L'aire limitée par la courbe $C_{½}$, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$ est $S_{½} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.
L'aire limitée par les courbes C_0, $C_{½}$ et la droite d'équation $x = 1$ est $S_{½} - S_0 = \frac{1}{4}$.
L'aire limitée par la courbe C_1, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$ est $S_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$.
L'aire limitée par les courbes C_1, $C_{½}$ et la droite d'équation $x = 1$ est $S_1 - S_{½} = \frac{1}{4}$.

donc l'aire restante est égale à $\frac{1}{4}$.

Les courbes C_0, $C_{½}$, C_1 partagent le carré OILJ en quatre parties égales.

Exercice 1 : France Métropolitaine Juin-99
Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 e^{\frac{t}{n}}\left(\frac{2t+3}{t+2}\right) dt$$

1 : *a* : Soit F la fonction définie sur [0 ; 2] par :

$$F(t) = \frac{2t+3}{t+2}.$$

Etudier les variations de F sur [0 ; 2]. En déduire que, pour tout réel t dans [0 ; 2],

$$\frac{3}{2} \le F(t) \le \frac{7}{4}.$$

***b* :** Montrer que, pour tout réel t dans [0 ; 2], on a :

$$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \le F(t)\, e^{\frac{t}{n}} \le e^{\frac{t}{n}}\,\frac{7}{4}.$$

***c* :** Par intégration, en déduire que :

$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \le u_n \le \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right).$$

***d* :** On rappelle que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.
Montrer que, si (u_n) possède une limite L, alors L est compris entre 3 et 3,5.

2 : *a* : Vérifier que, pour tout t Dans [0 ; 2], on a :

$$\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}.$$

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

***b* :** Montrer que, pour tout t dans [0; 2], on a :

$$1 \le e^{\frac{t}{n}} \le e^{\frac{2}{n}}.$$

En déduire que $I \le u_n \le e^{\frac{2}{n}}$.

***c* :** Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.
Correction

Exercice 2 : France Métropolitaine Septembre-98
On considère les intégrales :

$$I = \int_0^\pi \cos^4 x \, dx \quad \text{et } J = \int_0^\pi \sin^4 x \, dx.$$

1 :*a* : Montrer que l'intégrale I peut s'écrire :

$$I = \int_0^\pi \cos x\,[\cos x - \cos x \sin^2 x]\, dx$$

***b* :** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$$

***c* :** Montrer de même que $J = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$.

2 : *a* : Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

***b* :** Montrer que $I - J = 0$.

***c* :** En déduire les intégrales I et J.
Correction

Exercice 3 :Asie Juin-98

Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx.$$

1 : *a* : Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $]1\,;e[$, et pour tout n entier naturel, on a :

$$\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} > 0$$

***b* :** En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2 : *a* : Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

***b* :** Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

***c* :** En déduire I_2, I_3 et I_4.

Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3 : *a* : Démontrer que pour tout n, $I_n \geq 0$

***b* :** Démontrer que pour tout n, $(n+1)I_n \leq I_n\, e$.

***c* :** En déduire la limite de I_n.

***d* :** Déterminer la valeur de $n\, I_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de $n\, I_n$.

Correction

Exercice 4 : Sujet National 1995

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

et pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

1 : *a*) Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;1]$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Calculer la dérivée f' de f. En déduire u_0.

b) Calculer u_1.

2 : *a*) Prouver que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b) Montrer que pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

Déterminer la limite de (u_n).

3 : Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2} \, dx.$$

a) Vérifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on : $u_n + u_{n-2} = I_n$.

Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$n \,.\, u_n + (n-1)\, u_{n-2} = \sqrt{2}$$

b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a : $(2\,n-1)\, u_n \leq \sqrt{2}$

c) Montrer que la suite $(n\; u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

Correction

Exercice 5

On considère l'application f de **R** dans **R** définie par :

$$f(x) = (x+2)\, e^{-x}.$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. unité = 2cm

1 : Etudiez f et tracez (C).

2 : Calculez l'aire en cm ^{2} du domaine limité par (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation "$x = m$" , $(m \geq 0)$.

3 : Soit $G(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)$.Montrez que G est une primitive de $[f(x)]^2$ sur **R**.

4 : La valeur moyenne de $[f(x)]^2$ sur le segment $[0\,; m]$ a-t-elle une limite lorsque m tend vers $+\infty$?

Correction

Exercice 6

On pose où p est un entier naturel non nul.

1 : *a*) Calculez I_1 (On pourra faire une intégration par parties)

b) Montrez que pour tout entier naturel non nul :

$$I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3}\, I_p$$

c) Déduisez-en I_2 , puis I_3.

2 : On considère la suite (I_p) , p entier ≥ 0.

a) Montrez que cette suite est décroissante.

b) Etablissez la convergence de cette suite vers une limite $L \geq 0$.

3 : *a*) Montrez qu'il y a contradiction entre le fait que L soit strictement positive et la relation obtenue dans 1 : *b*).

b) Déduisez-en alors la limite de la suite (I_p)

Correction

Exercice 7 :

1 : Calculez l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos x \, dx$.

2 : On considère les intégrales définies par :

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} \, dx$ et

pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} \, dx$

a : Calculez $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.

b : Calculez I_1. Déduisez-en I_3 et I_5.

3 : Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ par :

$$f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

a : Montrez que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$.

b : Déduisez-en I_0 puis I_2 et I_4.

On rappelle que $\tan\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Exercice 8 :

Calculez $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\cos^2 x + \cos^4 x\right) dx$

Exercice 9 :

p et n sont des entiers natures

On pose : $I_{p,n} = \int_0^1 x^p\,(1-x)^n \, dx$

a : Calculez $I_{p,0}$ et $I_{p,1}$.

b : Calculez $I_{0,n}$ et $I_{1,n}$.

c : Etablissez pour $n \geq 1$, la relation :

$$I_{p,n} = \frac{n}{p+1}\, I_{p+1,n-1}$$

Exercice 10 :

Pour n entier ≥ 0, on définit la suite suivante :

Si $n = 0$, $\mathrm{I}_0 \int_1^e x \, \mathrm{d}\, x$ et si $n > 0$, $\mathrm{I}_n = \int_1^e x \, (\ln x)^n \, \mathrm{d}\, x$.

a : Calculez I_0 et I_1 .

b : Montrez que pour tout $n \geq 2$, $2\, \mathrm{I}_n + n\, \mathrm{I}_{n-2}$ est indépendant de n. Déterminez alors I_2.

c : Montrez que la suite (I_n) est décroissante.

Déduisez-en alors l'encadrement : $\dfrac{e^2}{n+3} \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$

Déterminez alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, \mathrm{I}_n$.

Exercice 11 :

Le but de l'exercice est le calcul de : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{d}\, x}{\cos^5 x}$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{d}\, x}{\cos^{2n+1} x}$.

a : Montrez qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x appartenant à $\left[0 \,; \dfrac{\pi}{4} \right]$,

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} .$$

Déduisez-en le calcul de I_0.

b : En effectuant une intégration par parties, montrez que pour tout $n > 0$,

$$2\, n\, \mathrm{I}_n = (2\, n - 1)\, \mathrm{I}_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}} .$$

c : Calculez alors l'intégrale I.

Exercice 1 :

a : Un rapide calcul sans difficulté montre que la fonction dérivée de F est :

$\mathrm{F}\,'(t) = \dfrac{1}{(t+2)^2}$

La fonction F est donc strictement croissante sur [0 ; 2].
Donc, on en déduit que pour tout t dans [0 ; 2] :

$$\mathrm{F}(0) \leq \mathrm{F}(t) \leq \mathrm{F}(2).$$

Or $\mathrm{F}(0) = \dfrac{3}{2}$ et $\mathrm{F}(2) = \dfrac{7}{4}$, on a donc la réponse à la question.

b : Comme pour tout x réel, on a $e^x > 0$, on obtient les inégalités demandées en multipliant tous les termes des inégalités précédentes par $e^{\frac{t}{n}}$.

$$\frac{3}{2}\, e^{\frac{t}{n}} \leq \mathrm{F}(t)\, e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}\, e^{\frac{t}{n}} .$$

c : On sait que l'intégrale est une forme linéaire positive.

Des inégalités précédentes, on peut alors déduire que pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{3}{2} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \, \mathrm{d}\, t \leq \int_0^2 \mathrm{F}\,(t)\, e^{\frac{t}{n}} \, \mathrm{d}\, t \leq \frac{7}{4} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \, \mathrm{d}\, t$$

On sait qu'une primitive de $e^{\frac{t}{n}}$ est $(n \,.\, e^{\frac{t}{n}})$, d'où :

$$\int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \, \mathrm{d}\, t = n \left[e^{\frac{2}{n}} - e^{\frac{0}{n}} \right] = n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$$

On remarque que $u_n = \int_0^2 \mathrm{F}\,(t)\, e^{\frac{t}{n}} \, \mathrm{d}\, t$. D'où on a bien :

$$\frac{3}{2}\, n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right] \leq u_n \leq \frac{7}{4}\, n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$$

c : On sait que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

En prenant ($h = \dfrac{2}{n}$), comme $\dfrac{2}{n}$ tend vers 0 si n tend vers + ∞,

on obtient alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right] = 2$

D'où, la suite $\dfrac{3}{2}\, n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$ tend vers 3 si n tend vers + ∞.

De même, la suite $\dfrac{7}{4}\, n \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$ tend vers $\dfrac{7}{2}$ si n tend vers + ∞.

Comme la suite (u_n) est encadrée par ces deux suites, si elle possède une limite L, alors on doit avoir :

$$3 \leq \mathrm{L} \leq \frac{7}{2} .$$

2 : *a* : Simple calcul, aucune difficulté. On en déduit alors que : $\mathrm{I} = \int_0^2 \dfrac{2\, t + 3}{t + 2} \, \mathrm{d}\, t = \int_0^2 \left(2 - \dfrac{1}{t+2} \right) \mathrm{d}\, t$

$\mathrm{I} = \left[[2\, t - \ln\, (t + 2) \right]_0^2 = 4 - \ln 2$.

b : On utilise la fait que (e^x) est croissante sur IR. Donc, pour tout t dans [0 ; 2], on a $0 \leq \dfrac{t}{n} \leq \dfrac{2}{n}$.

D'où $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.

Comme F(t) est ≥ 0 sur [0 ; 2], en multipliant les termes des inégalités précédentes par F(t), et en intégrant terme à terme, on obtient : $\mathrm{I} \leq \mathrm{u}_n \leq e^{\frac{2}{n}}\, \mathrm{I}$

c : Comme $e^{\frac{2}{n}}$ tend vers 1 si n tend vers + ∞, car $\dfrac{2}{n}$ tend vers 0, on en déduit de l'encadrement de la suite (u) précédent, que cette suite converge vers L = 4 – ln 2.

Enoncé

Exercice 2 :

Etude des intégrales : $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, \mathrm{d}\, x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, \mathrm{d}\, x$.

1 : *a* : On sait que pour tout x réel, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Donc

$\cos^4 x = \cos^2 x \,.\, \cos^2 x = \cos^2 x \,.\, (1 - \sin^2 x)$

$\cos^4 x = \cos x \,.\, [\cos x - \cos x \,.\, \sin^2 x]$

D'où : $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \cos x\, [\cos x - \cos x \sin^2 x] \, \mathrm{d}\, x$.

b : On remarque que la dérivée de

$\mathrm{U}(x) = [\sin x - \dfrac{1}{3} \sin^3 x]$ est $\mathrm{U}\,'(x) = [\cos x - \cos x \sin^2 x]$.

Donc I peut s'écrire :

$I = \int_0^{\pi} \cos x\, U'(x)\, dx$

$= \left[\cos x\, U(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin x\, U(x)\, dx$

D'où, $I = \int_0^{\pi} \sin x\,[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x]\, dx$

$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$

$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx - \frac{1}{3}$ J.

c : De même, on remarque que :

$J = \int_0^{\pi} \sin x\,[\sin x - \sin x \cos^2 x]\, dx$

Si on pose $V(x) = [-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x]$, on a alors :

$V'(x) = \sin x - \sin x .\cos^2 x$, d'où :

$J = \int_0^{\pi} \sin x\, V'(x)\, dx$

$J = \left[\sin x\, V(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x\, V(x)\, dx$

D'où, $J = \int_0^{\pi} \cos x\,[\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x]\, dx$

$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos^4 x\, dx$

$$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx - \frac{1}{3}\, I.$$

2 : *a* : Des deux questions précédentes, on en déduit que :

$$I + J = \int_0^{\pi} [\sin^2 x + \cos^2 x]\, dx - \frac{1}{3}[I + J]$$

Comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} [\sin^2 x + \cos^2 x]\, dx = \int_0^{\pi} 1\, dx = \pi$$

D'où : $I + J = \pi - \frac{1}{3}[I + J]$ et donc $\frac{4}{3}[I + J] = \pi$ et

finalement : $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

b : Pour vérifier que $(J - I = 0)$, remarquons que, d'après les définitions de I et de J, on a :

$I - J = \int_0^{\pi} [\cos^4 x - \sin^4 x]\, dx$

$I - J = \int_0^{\pi} [\cos^2 x - \sin^2 x][\cos^2 x + \sin^2 x]\, dx$

$= \int_0^{\pi} [\cos^2 x - \sin^2 x]\, dx$

De plus, en utilisant les résultats de la question **1 :**

$I - J = \int_0^{\pi} [\sin^2 x - \cos^2 x]\, dx - \frac{1}{3}[J - I]$

d'où

$\frac{2}{3}[I - J] = \int_0^{\pi} [\sin^2 x - \cos^2 x]\, dx$

En comparant ces deux égalités, on obtient alors :

$\frac{2}{3}[I - J] = -[I - J]$ d'où $I - J = 0$

c : Comme $(I + J = \frac{3\pi}{4})$ et $(I = J)$, on en déduit que :

$I = J = \frac{3\pi}{8}$.

Enoncé

Exercice 3 :

Etude de la suite d'intégrale : $\int_1^{e} [\ln x]^n\, dx$.

1 : *a* : Pour tout n entier naturel, on a :

$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n . [1 - \ln x]$.

Pour x appartenant à l'intervalle $]1 ; e[$, on sait que $\ln x$ est appartient à $]0 ; 1[$.

Donc $(\ln x)^n .[1 - \ln x]$ est strictement négatif. D'où :

Pour tout x dans $]1 ; e[$ et pour tout n entier naturel , $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$

b : De là, on en déduit que pour tout n entier naturel, $I_n - I_{n+1} \geq 0$,

et donc que la suite (I_n) est bien décroissante.

2 : *a* :

$I_1 = \int_1^{e} \ln x\, dx = \int_1^{e} 1 . \ln x\, dx$

$= [x \ln x]_1^e - \int_1^{e} x \times \frac{1}{x}\, dx$

$= e - \int_1^{e} 1\, dx = e - (e - 1) = 1.$

b : Comme la dérivée de $(\ln x)^{n+1}$ est $(n + 1)\frac{1}{x}.(\ln x)^n$, on a :

$I_{n+1} = \int_1^{e} [\ln x]^{n+1}\, dx$

$I_{n+1} = \left[x (\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^{e} x\,(n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n\, dx$

$I_{n+1} = e - \int_1^{e} (n+1)(\ln x)^n\, dx$

$I_{n+1} = e - (n + 1)\, I_n$.

c : On peut alors écrire que :

$I_2 = e - 2 . I_1 = e - 2 = 0{,}718$ à 10^{-3} près par défaut

$I_3 = e - 3 . I_2 = 6 - 2e = 0{,}563$ à 10^{-3} près par défaut

$I_4 = e - 4 . I_3 = 9e - 24 = 0{,}464$ à 10^{-3} près par défaut

3 : *a* : Comme la fonction ln est positive sur $[1 ; e]$, on a bien $0 \leq I_n$.

b : A la question 2 :*b* :, on a montré que

$I_{n+1} = e - (n + 1)\, I_n$.

Comme la suite (I_n) est positive, d'après la question précédente, on en déduit que pour tout n entier naturel non nul, on a :

$0 \leq e - (n + 1)\, I_n$ ou encore $(n + 1)\, I_n \leq e$

c : De là, on en déduit que $I_n \leq \frac{e}{n+1}$. Comme la suite $\left(\frac{e}{n+1}\right)$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$, et que la suite (I_n) est minorée par 0, on en conclut que la suite (I_n) tend vers 0.

d : Toujours d'après la question 2 : *b* :, on peut écrire que $(n + 1)\, I_n + I_{n+1} = e$, ou encore :

$n\, I_n + (I_n + I_{n+1}) = e$

Comme la suite (I_n) converge vers 0, il en est de même pour $(I_n + I_{n+1})$, d'où la limite de $n\, I_n$ est e.

Enoncé

Exercice 4 :

1 : *a* : La dérivée de la fonction $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est , en utilisant la formule donnant la dérivée de ln |U| : $f'(x) = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

De là, on en déduit qu'une primitive de $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est la fonction *f* et donc que : $u_0 = f(1) - f(0) = \ln(1 + \sqrt{2})$

b : La fonction à intégrer admet pour primitive : $\left(\sqrt{1+x^2}\right)$. On obtient alors :

$u_1 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$:

a : Il suffit de remarquer que pour tout *x* appartenant à [0 ; 1] et pour tout *n* entier positif, on a : $x^{n+1} \le x^n$. Donc sur l'intervalle [0 ; 1] , on a : $\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \le \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$.

Comme l'intégrale est une forme linéaire positive sur [0 ; 1], on obtient bien $u_{n+1} \le u_n$.
Cette suite est donc décroissante et minorée par 0. Elle admet donc une limite L positive.

b : Evident car x^2 est croissante sur [0 ; 1]. De là, on voit que pour tout *x* dans [0 ; 1] , on a :

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

De même, on a $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

La suite converge donc vers 0.

3 : *a* : Simple calcul en mettant x^{n-2} en facteur.
En faisant une intégration par parties sur I_n, on obtient :

$$I_n = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n-1}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$I_n = \frac{1}{n-1}(\sqrt{2} - u_n)$$

En utilisant la relation précédente, on obtient alors :

$$u_n + u_{n-2} = \frac{1}{n-1}(\sqrt{2} - u_n)$$

ce qui conduit bien à $n\,u_n + (n-1)\,u_{n-2} = \sqrt{2}$

b : Il suffit d'utiliser alors le fait que la suite (*u*) est décroissante et donc que $u_n \le u_{n+1}$ pour obtenir :
$(2n-1)\,u_n \le \sqrt{2}$.

c : D'après les résultats obtenus dans la question 2 : *b* : , on peut dire que pour tout *n* , on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le u_n \le \frac{1}{n+1}.$$

et on sait que $(2n-1)\,u_n \le \sqrt{2}$.

On obtient alors :

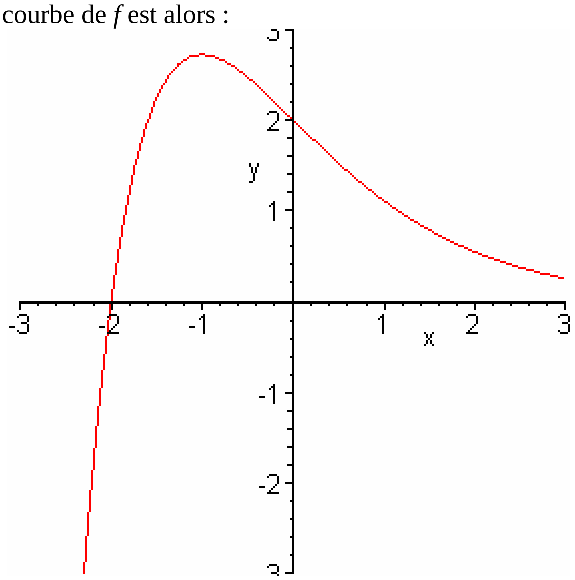
$$\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \le n\,u_n \le \frac{\sqrt{2}}{2} + u_n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n+1)} = 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on peut alors dire que la suite $(n\,u_n)$ converge vers : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Enoncé

Exercice 5 :

1 : La fonction *f* est définie et dérivable sur **R**. De plus, pour tout *x* réel, on a :
$f'(x) = e^{-x} - (x+2)\,e^{-x} = e^{-x}(-x-1)$.
L'étude du signe de cette dérivée ne pose aucun problème et on obtient alors que *f* croissante sur] – ∞; – 1] et décroissante sur [– 1 ; – ∞[.
On peut voir aussi que *f x* tend vers 0 si *x* tend vers + ∞, et vers – ∞ si *x* tend vers – ∞.
La courbe de *f* est alors :



2 : L'aire cherchée correspond à

A(m) = $\left(4\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx\right)$ cm² car l'unité d'aire sur les axes est 2 cm.
En faisant une intégration par parties, on obtient alors :

$$\int_0^m (x+2)\,e^{-x}\,dx = \left[-(x+2)\,e^{-x}\right]_0^m + \int_0^m e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-(x+2)\,e^{-x} - e^{-x}\right]_0^m$$

$$= \left[-(x+3)\,e^{-x}\right]_0^m$$

$= -(m+3)\,e^{-m} + 3$

Il ne reste plus qu'à multiplier par 4 pour avoir l'aire en cm².
On peut remarquer que cette aire tend vers 12 si *m* tend vers + ∞.

3 : Pour vérifier que G est une primitive de f^2 , il suffit de calculer la dérivée de G. Or :

$$G'(x) = 2\,e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{13}{4}\right) - e^{-2x}\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$G'(x) = e^{-2x}(x^2 - 4x + 4)$
$G'(x) = [e^{-x}(x-2)]^2$
$G'(x) = [f(x)]^2$
Ce qui donne alors la réponse.

4 : Par définition, la valeur moyenne de $[f(x)]^2$ sur

l'intervalle $[0\,;m]$ est : $\dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^m [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ et comme G est une primitive de f^2.

$$\int_0^m [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{G}(m) - \mathrm{G}(0)$$

$$= -e^{-2m}\left(\frac{m^2}{2} + \frac{5m}{2} + \frac{13}{4}\right) + \frac{13}{4}e^{-2m}$$

$$\frac{1}{m}\int_0^m [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = -e^{-2m}\left(\frac{m}{2} + \frac{5}{2} + \frac{13}{4m}\right) + \frac{13}{4m}$$

On voit alors sans difficulté que cette valeur moyenne tend vers 0 si m tend vers $+\infty$.

Enoncé

Exercice 6 :

1 : *a* : En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\mathrm{I}_1 = \int_1^e x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_1 = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_1 = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e$$

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{9} + \frac{2e^3}{9}$$

b : C'est la même calcul que le précédent. On effectue une intégration par parties et on obtient le résultat.

$$\mathrm{I}_{p+1} = \int_1^e x^2(\ln x)^{p+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_{p+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{p+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}(p+1)\frac{1}{x}(\ln x)^p\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_{p+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{p+1}\right]_1^e - \frac{p+1}{3}\int_1^e x^2(\ln x)^p\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3}\mathrm{I}_p$$

c : En particulier, on a :

$$\mathrm{I}_2 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{I}_1 = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$$

$$\mathrm{I}_3 = \frac{e^3}{3} - \mathrm{I}_2 = \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}$$

2 : *a* : Pour voir que la suite (I_n) est décroissante, il suffit de remarquer que pour tout x compris entre 1 et e, $\ln x$ est compris entre 0 et 1. Donc, pour tout x compris entre 1 et e, on a : $x^2(\ln x)^{p+1} \leq x^2(\ln x)^p$.

Comme l'intégrale sur $[1\,;e]$ est une forme linéaire positive, on a bien $\mathrm{I}_{p+1} \leq \mathrm{I}_p$ si p est un entier positif.

b : Le fait que I_p soit ≥ 0 est clair. C'est donc une suite décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $\mathrm{L} \geq 0$.

3 : *a* : Si L est > 0 , alors en particulier, la suite $(p+1)\,\mathrm{I}_p$ tend vers $+\infty$. Mais d'après la relation obtenue en 1 : *b* , on a : $\mathrm{I}_{p+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{p+1}{3}\mathrm{I}_p$.

Ce qui n'est pas possible si on considère le passage à la limite (p tend vers $+\infty$). Donc on ne peut pas avoir $\mathrm{L} > 0$.

b : Comme L est un réel > 0, on en déduit que $\mathrm{L} = 0$. La suite converge donc vers 0.

Enoncé