On considère T la transformation du plan qui au point M (z) associe M' (z') tel que : $z' = -3\,i\,\bar{z} + 2 + 6\,i$.

1. Ecrire les coordonnées x', y' de M' en fonction des coordonnées x, y de M.
2. Démontrer qu'il existe un point unique A invariant par T.
3. Démontrer que T est la composée de la symétrie orthogonale autour de l'axe ($x\,x'$) suivie d'une similitude directe à préciser.
4. Démontrer que T est aussi la composée de l'homothétie de centre A et de rapport – 3 et de la symétrie orthogonale autour de la droite D passant par A et de coefficient directeur 1.
5. Quelles sont les droites du plan qui se transforment par T en une droite parallèle.
6. Démontrer que T ○ T est une homothétie.

CORRECTION

1. $z = x + i\,y$ avec x et y réels, donc $z' = -3\,i\,(x - i\,y) + 2 + 6\,i$

$z' = -3\,y + 2 + i\,(-3\,x + 6)$ donc en égalant les parties réelles et imaginaires : $x' = -3\,y + 2$ et $y' = -3\,x + 6$

2. Un point est invariant par T si et seulement si, il existe deux réels x et y tels que : $x = -3\,y + 2$ et $y = -3\,x + 6$

x et y sont donc solutions de : $\begin{cases} x + 3\,y = 2 \\ 3\,x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x + 9\,y = 6 \\ 3\,x + y = 6 \end{cases}$ ⇔ par différence terme à terme : $\begin{cases} x + 3\,y = 2 \\ 8\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

T admet un seul point invariant A de coordonnées (2 ; 0)

3. Par la symétrie orthogonale s autour de l'axe ($x\,x'$), le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \bar{z}$

Soit f = T ○ s alors f : $M \xrightarrow{s} M_1 \xrightarrow{T} M'$ donc f a pour écriture complexe : $z' = -3\,i\,\bar{z}_1 + 2 + 6\,i$ soit $z' = -3\,i\,z + 2 + 6\,i$

f a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ donc f est donc une similitude directe.

A est invariant par s et T donc A est invariant par f. f est la similitude directe de centre A de rapport $|a| = |-3\,i| = 3$ et d'angle arg (a) donc d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

f = T ○ s donc f ○ s = T ○ s ○ s = T donc T est la composée de la symétrie orthogonale autour de l'axe ($x\,x'$) suivie de la similitude directe de centre A de rapport 3 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. Soit h l'homothétie de rapport – 3 de centre A, h^{-1} est l'homothétie de rapport $-\dfrac{1}{3}$ de centre A,

h^{-1} a pour écriture complexe : $z' - 2 = -\dfrac{1}{3}(z - 2)$ soit $z' = -\dfrac{1}{3}z + \dfrac{8}{3}$

Soit S = h^{-1} ○ T alors S a pour écriture complexe : $z' = -\dfrac{1}{3}(-3\,i\,\bar{z} + 2 + 6\,i) + \dfrac{8}{3} = i\,\bar{z} - \dfrac{2}{3} - 2\,i + \dfrac{8}{3}$ soit $z' = i\,\bar{z} + 2 - 2\,i$.

S a une écriture complexe de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ donc S est une similitude indirecte de rapport $|a| = 1$

A est invariant par h^{-1} et T donc A est invariant par S.

Cherchons les points invariants par S : un point est invariant par S si et seulement si, il existe deux réels x et y tels que :

$x + i\,y = i\,(x - i\,y) + 2 - 2\,i$ soit $x + i\,y = y + 2 + i\,(x - 2)$

x et y sont donc solutions de : $\begin{cases} x = y + 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 2$

Les points invariants par S sont les points de la droite D d'équation $y = x + 2$, droite passant par A et de coefficient directeur 1.

S = h^{-1} ○ T donc h ○ S = h ○ h^{-1} ○ T = T donc T est la composée de l'homothétie de centre A et de rapport – 3 et de la symétrie orthogonale autour de la droite D passant par A et de coefficient directeur 1.

5. Soit Δ une droite, h^{-1} transforme Δ en une droite parallèle.

Δ est transformée en une droite parallèle si et seulement si h^{-1} ○ T transforme Δ en une droite parallèle.

or h^{-1} ○ T = S donc Δ est transformée en une droite parallèle si et seulement S transforme Δ en une droite parallèle.

S est une symétrie orthogonale d'axe D donc S transforme Δ en une droite parallèle si et seulement si Δ est parallèle à D.

6. Soit H = T ○ T alors H : $M \xrightarrow{T} M_1 \xrightarrow{T} M'$ donc H a pour écriture complexe : $z' = -3\,i\,\bar{z}_1 + 2 + 6\,i$

soit $z' = -3\,i\,(3\,i\,z + 2 - 6\,i) + 2 + 6\,i$ donc $z' = 9\,z - 6\,i - 18 + 2 + 6\,i$ donc $z' = 9\,z - 16$ donc T ○ T est une homothétie de rapport 9 et de centre A.