

Concours d'entrée en 1<sup>ère</sup> année du cycle préparatoire

Epreuve de mathématiques (durée 1h30min)

**Remarques importantes**

- 1) Les documentations, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
- 2) Parmi les réponses proposées elle n'y a qu'une qui est juste.
- 3) Cocher la case qui correspond à la réponse correcte sur la fiche de réponses.

4) **Règles de notation :**

Réponse juste = **1 point** ; Réponse fausse = **-1 point** ; Sans réponse = **0 point**.

**Noter Bien** Plus qu'une case cochée = **-1 point**.

---

**Exercice 1**

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - (-1)^n n + 1}{n + 3}$  n'existe pas.
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n + 1) - \ln(n + 2)$  n'existe pas.
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n)$  n'existe pas.
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0, 7)^n + (0, 7)^n$  n'existe pas.

**Exercice 2**

On considère une suite de réels  $(u_n)$ .

1. Une suite  $(u_n)$  croissante est-elle nécessairement divergente vers  $+\infty$ ?
2. Une suite  $(u_n)$  divergente vers  $+\infty$  est-elle nécessairement croissante?
3. Une suite  $(u_n)$  bornée est-elle nécessairement convergente?
4. Une suite  $(u_n)$  croissante et non majorée diverge-t-elle nécessairement vers  $+\infty$ ?

### Exercice 3

Soient  $z_1$  et  $z_2$  les deux nombres complexes solutions de l'équation  $z^2 - 4z + 6 = 0$ . Dans le plan complexe muni du repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  puis  $I$  le milieu du segment  $[M_1, M_2]$ .

1. Le nombre  $z_1 + z_2$  est imaginaire pur.
2. L'affixe du point  $I$  est imaginaire pure.
3. Les droites  $(OI)$  et  $(M_1M_2)$  sont perpendiculaires.
4. Le triangle  $OM_1M_2$  n'est pas équilatéral.

### Exercice 4

Soit  $P$  le polynôme défini par  $P(X) = 2X^3 + X^2 - 5X + 2$ .

1. Les réels  $-2, \frac{1}{2}, -1$  sont solutions de l'équation  $P(x) = 0$ .
2. L'ensemble  $S$  des solutions réelles de l'équation  $2e^{3x} + e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$  est  $S = \{\ln 2, 0\}$ .
3. L'ensemble  $S$  des solutions réelles de l'équation  $2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 5 \ln x + 2 = 0$  est  $S = \left\{e, \frac{1}{e^2}, \sqrt{e}\right\}$ .
4. L'ensemble  $S$  des solutions réelles de l'équation  $2 \sin^3 x + \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$  est  $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$ .

### Exercice 5

D'un sac contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on extrait trois boules simultanément.

1. La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y ait toutes celles du sac dont le numéro est un multiple de 5 est  $\frac{2}{15}$ .
2. La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y en ait au plus une dont le numéro est un multiple de 5 est  $\frac{13}{15}$ .
3. La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y en ait au moins une dont le numéro est un multiple de 5 est  $\frac{8}{15}$ .
4. La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y ait toutes celles du sac dont le numéro est un multiple de 3 est  $\frac{1}{60}$ .

### Exercice 6

Soient les suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_0 = 0$ ,  $u_{n+1} = u_n - 1$  et  $v_n = 3^{u_n}$ .

1. La suite  $(v_n)$  est géométrique.
2. La suite  $(v_n)$  est divergente.
3. Pour tout entier  $n > 0$ , si  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$ .
4. La suite  $(w_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $w_n = \ln(v_n)$  est géométrique.

### Exercice 7

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = -1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ .

1. La suite  $(u_n)$  est positive pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. La suite  $(u_n)$  est croissante.
3.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 16\sqrt{2}$ .
4. La suite  $(u_n)$  est convergente.

### Exercice 8

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos x e^{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ .

1.  $f(\pi - x) - f(x) = 0$ .
2. Le point  $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  est un centre de symétrie de la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.
3. La dérivée de  $f$  est  $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}$ .
4. Une primitive  $F$  de  $f$  est définie par  $F(x) = e^{\sin x}$ .

### Exercice 9

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2-x-2}\right)$ .

1. La fonction  $f$  est définie sur  $] -1, 1[ \cup ] 2, +\infty[$ .
2. La fonction  $f$  peut s'écrire  $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x^2-x-2)$  sur  $] -1, 1[ \cup ] 2, +\infty[$ .
3.  $f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2}$  sur  $] -1, 1[ \cup ] 2, +\infty[$ .
4. La fonction  $f$  est croissante sur  $] 2, +\infty[$ .

**Exercice 10**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$  et  $f(0) = 0$ .

1. La fonction  $f$  n'est pas continue en 0.
2. Sur  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ .
4. La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de  $f$ .

**Exercice 11**

1. La fonction  $x \rightarrow \cos(4(x+1))$  est la dérivée de la fonction  $x \rightarrow \cos(x+1)\sin(x+1)$ .
2. La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{\sin^2 x}$  est la dérivée de la fonction  $x \rightarrow \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x + 1}\right)$ .
3. La fonction  $x \rightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$  est la dérivée de la fonction  $x \rightarrow \ln(\sqrt{x^2-1}-x)$ .
4. La fonction  $x \rightarrow (\sin 2x)e^{\sin^2 x}$  est la dérivée de la fonction  $x \rightarrow e^{\sin^2 x}$ .

**Exercice 12**

On considère les deux intégrales  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^2 x dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$ .

1.  $2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^2 x dx$ .
2.  $I + J = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ .
3.  $I = \frac{4 + \sqrt{2}}{12}$ .
4.  $J = \frac{5\sqrt{2} - 8}{12}$ .

### Exercice 13

Soit la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ .

1. La fonction  $f$  est paire.
2. On a  $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ .
3. La fonction  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
4. Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $f(x) < 2$ .

### Exercice 14

1.  $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x| + |x+1|) dx = 0$ .
2.  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos |x| dx = 0$ .
3. La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$  est une primitive de la fonction  $x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x}$  sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
4. La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$  est une primitive de la fonction  $x \rightarrow x^2\sqrt{x^2+1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 15

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le repère orthonormal de l'espace. Soit  $\mathcal{P}$  le plan de repère  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  où  $A(-1, 1, 2)$ ,  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

1. Le vecteur  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  n'est pas normal au plan  $\mathcal{P}$ .
2. L'équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  est  $x + y - 2z + 6 = 0$ .
3. La droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $B(1, 0, -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{w}$  est définie par  $y + x - 1 = 0$  et  $z + 2x - 1 = 0$ .
4. Le plan  $\mathcal{P}$  et la droite  $\mathcal{D}$  se coupent au point  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$ .