Exercice 1

Soit f_a la fonction définie par $f_a(x)= \dfrac{x^2-ax}{x^2-4x+3}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble D de définition de f_a.

   La fonction f_a est définie si et seulement si $x^2 - 4x+3 \neq 0$

   Le discriminant Δ associé au trinôme $g : x : \mapsto x^2 - 4x+3$ est égal à 4

   Il en résulte que le trinôme g admet deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.

   Conclusion : D= $]-\infty ; 1[\cup]1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

2. Déterminer la (ou les valeurs) de a pour laquelle (ou lesquelles), la fonction f_a :

   a. n'admet pas d'extremums sur D

   b. admet un maximum et un minimum sur D

   c. admet uniquement un extremum sur D.

De la question précédente, on peut dresser le tableau de signe de g

Le trinôme g est du signe de a, à l'extérieur des racines avec $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $g(x)$		+	0	−	0	+	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle)

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle)

- **Limite de f_a en 1 :**

Il y a 3 cas. En effet, on a : $\lim\limits_{x\to1} x^2 - a\,x = 1 - a$ et $\lim\limits_{x\to1} x^2 - 4x +3 = 0$

Voir tableau de signe du trinôme g

- Si $a = 1$, on a une forme indéterminée du type " $\dfrac{0}{0}$ ".

Dans ce cas, on a $\lim\limits_{x\to1} f_1(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-x}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x\,(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x}{x-3} = -\dfrac{1}{2}$

- Si $a < 1$ alors $1 - a > 0$

  Or $\lim\limits_{x\to1^-} x^2 - a\,x = 1 - a$ (qui est strictement positif) et $\lim\limits_{x\to1^-} x^2 - 4x +3 = 0^+$ donc par quotient

  $\lim\limits_{x\to1^-} f_a(x) = +\infty$

  Et $\lim\limits_{x\to1^+} x^2 - a\,x = 1 - a$ (qui est strictement positif) et $\lim\limits_{x\to1^+} x^2 - 4x +3 = 0^-$ donc par quotient

  $\lim\limits_{x\to1^+} f_a(x) = -\infty$

- Si $a > 1$ alors $1 - a < 0$

  Or $\lim\limits_{x\to1^-} x^2 - a\,x = 1 - a$ (qui est strictement négatif) et $\lim\limits_{x\to1^-} x^2 - 4x +3 = 0^+$ donc par quotient

  $\lim\limits_{x\to1^-} f_a(x) = -\infty$

Et $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - a\,x = 1 - a$ (qui est strictement négatif) et $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 4x + 3 = 0^-$ donc par quotient

$\lim\limits_{x \to 1^+} f_a(x) = +\infty$

Résumons cela à l'aide d'un tableau :

Si $a < 1$	Si $a = 1$	Si $a > 1$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f_a(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f_a(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 1} f_a(x) = -\dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{x \to 1^-} f_a(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f_a(x) = +\infty$

- **Limite de f_a en 3 :**

Il y a 3 cas. En effet, on a : $\lim\limits_{x \to 3} x^2 - a\,x = 9 - 3a$ et $\lim\limits_{x \to 3} x^2 - 4x + 3 = 0$

Voir tableau de signe du trinôme g

- Si $a = 3$, on a une forme indéterminée du type " $\dfrac{0}{0}$ " .

Dans ce cas, on a $\lim\limits_{x \to 3} f_3(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x\,(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{3}{2}$

- Si $a < 3$ alors $3\,a < 9$ et donc $9 - 3a > 0$

  Or $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 - a\,x = 9 - 3a$ (qui est strictement positif) et $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 - 4x + 3 = 0^-$ donc par quotient

  $\lim\limits_{x \to 3^-} f_a(x) = -\infty$

  Et $\lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - a\,x = 9 - 3a$ (qui est strictement positif) et $\lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 4x + 3 = 0^+$ donc par quotient

  $\lim\limits_{x \to 3^+} f_a(x) = +\infty$

- Si $a > 3$ alors $9 - 3a < 0$

  Or $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 - a\,x = 1 - a$ (qui est strictement négatif) et $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 - 4x + 3 = 0^-$ donc par quotient

  $\lim\limits_{x \to 3^-} f_a(x) = +\infty$

  Et $\lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - a\,x = 1 - a$ (qui est strictement négatif) et $\lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 4x + 3 = 0^+$ donc par quotient

  $\lim\limits_{x \to 3^+} f_a(x) = -\infty$

Résumons cela à l'aide d'un tableau :

Si $a < 3$	Si $a = 3$	Si $a > 3$
$\lim\limits_{x \to 3^-} f_a(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^+} f_a(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 3} f_a(x) = \dfrac{3}{2}$	$\lim\limits_{x \to 3^-} f_a(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^+} f_a(x) = -\infty$

$\forall\, x \in \mathrm{D}$, $f_a\,'(x) = \dfrac{(2x-a)(x^2-4x+3)-(x^2-ax)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \dfrac{(-4+a)x^2+6x-3a}{g^2(x)}$

$\forall\, x \in \mathrm{D}$, $\dfrac{1}{g^2(x)} > 0$

On en déduit que le signe de $f_a\,'(x)$ est celui de $h_a(x)$ avec $h_a(x) = (-4+a)\,x^2 + 6x - 3a$.

On distingue plusieurs sous cas :

- Si $a = 4$, alors $h_a(x) = 6\,x - 12$
- Si $a \neq 4$, alors h_a est un trinôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $12a^2 - 48\,a + 36$

Selon la valeur du discriminant Δ, il y a deux ou une ou aucune racine(s) réelle(s).

On est amené à déterminer le signe de Δ où $\Delta = 12(a^2 - 4a + 3) = 12(a-1)\,(a-3)$

- Si $a \in \,]-\infty\,;1[\, \cup\,]3\,;\,+\infty[\, \setminus\{4\}$ alors $\Delta > 0$ et h_a admet deux racines x_1 et x_2 et est du signe de $(-4+a)$, à l'extérieur de ses deux racines x_1 et x_2 avec $x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)}$ et $x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)}$
- Si $a \in \,]1\,;3[$, alors $\Delta < 0$ et h_a n'admet aucune racine réelle et h_a est du signe de $(-4+a)$ qui est strictement négatif donc pour tout réel x, $h_a(x) < 0$.
- Si $a = 1$ ou $a = 3$, alors $\Delta = 0$ et h_a s'annule en respectivement en 1 et 3.

De plus, lorsque $a = 1$ ou $a = 3$, $h_a(x) \leq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

Maintenant, il va falloir que l'on sache comment situer x_1 et x_2 puis x_1 (resp. x_2) par rapport à 1 et 3.
Pour les comparer, on va étudier le signe de leur différence :

On peut remarquer que $\quad x_1 - x_2 = \dfrac{-6-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} - \dfrac{-6+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{(-4+a)} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{4-a}$

Si $a < 1$ ou $3 < a < 4$, alors $\quad 4-a > 0$ et donc $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{4-a} > 0$ d'où $x_1 - x_2 > 0$ c'est-à-dire $x_1 > x_2$

Si $a > 4$, alors $\quad 4-a < 0$ donc $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{4-a} < 0$ d'où $x_1 - x_2 < 0$ c'est-à-dire $x_1 < x_2$

Supposons à présent que $a < 1$

Comparaison de x_1 par rapport à 1

On a : $x_1 - 1 = \dfrac{-6-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} - 1 = \dfrac{2-2a-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)}$

> Remarque : De façon générale, on n'a pas toujours équivalence entre $A \geq B$ et $A^2 \geq B^2$
> Mais lorsque A et B sont tous deux positifs, il y a toujours équivalence. Cela résulte du fait que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$2-2a-\sqrt{\Delta} \geq 0 \Leftrightarrow 2-2a \geq \sqrt{\Delta}$
$\Leftrightarrow 4-8a+4a^2 \geq 12a^2-48a+36$
$\Leftrightarrow 8a^2-40a+32 \leq 0 \Leftrightarrow a^2-5a+4 \leq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-4) \leq 0$

Comme $a < 1$, alors $(a-1)$ et $(a-4)$ sont tous deux strictement négatifs donc le produit $(a-1)(a-4)$ est strictement positif. En conséquence, cela signifie que si $a < 1$, alors $2-2a-\sqrt{\Delta} < 0$
Comme $a < 1$ entraîne $2(-4+a) < 0$

Il en résulte que $\dfrac{2-2a-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} > 0$ et donc $x_1 > 1$ lorsque $a < 1$.

Comparaison de x_1 par rapport à 3

Et $x_1 - 3 = \dfrac{-6-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} - 3 = \dfrac{18-6a-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)}$

> Remarque : $a < 1 \Rightarrow -6a > -6$
> $\Rightarrow 18-6a > 18-6$
> $\Rightarrow 18-6a > 0$
> On a bien équivalence entre
> $18-6a \geq \sqrt{\Delta}$ et $(18-6a)^2 \geq \Delta$

$18-6a-\sqrt{\Delta} \geq 0 \Leftrightarrow 18-6a \geq \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow 6^2(3-a)^2 \geq \Delta$
$\Leftrightarrow 6^2(9-6a+a^2) \geq \Delta$
$\Leftrightarrow 3(9-6a+a^2) \geq a^2-4a+3$
$\Leftrightarrow 2a^2-14a+24 \geq 0$
$\Leftrightarrow 2(a^2-7a+12) \geq 0 \Leftrightarrow a^2-7a+12 \geq 0 \Leftrightarrow (a-3)(a-4) \geq 0$ **(***)**

On en déduit que $a < 1$ entraîne que $(a-3)$ et $(a-4)$ sont tous deux strictement négatifs, donc leur produit est strictement positif, ce qui entraîne à son tour que $18-6a-\sqrt{\Delta} > 0$

Par quotient, il en résulte que $a < 1$ entraîne $\dfrac{18-6a-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} < 0$ d'où $x_1 < 3$.

Comparaison de x_2 par rapport à 1

On a : $x_2 - 1 = \dfrac{-6+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} - 1 = \dfrac{2-2a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)}$

$a < 1 \Rightarrow -2a > -2 \Rightarrow 2 - 2a > 0 \Rightarrow 2 - 2a + \sqrt{\Delta} > 0$ (somme de termes strictement positifs)

$a < 1 \Rightarrow 2\,(-4+a) < 0$

On en déduit des deux résultats précédents, que par quotient, $\dfrac{2-2a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} < 0$ et donc $x_2 - 1 < 0$ d'où $x_2 < 1$

Bilan n°1 : si $a < 1$, on a toujours $x_2 < 1 < x_1 < 3$

Supposons à présent que $3 < a < 4$

Comparaison de x_1 par rapport à 3

En reprenant les résultats obtenus en **(***)**, on en déduit que

$3 < a < 4$ entraîne que $(a - 3)$ et $(a - 4)$ sont tous deux de signe strictement opposés et donc leur produit est strictement négatif, ce qui entraîne à son tour que $18 - 6a - \sqrt{\Delta} < 0$

Par quotient, il en résulte que $3 < a < 4$ entraîne $\dfrac{18-6a-\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} > 0$ d'où $x_1 > 3$.

Comparaison de x_2 par rapport à 1

On a toujours $x_2 - 1 = \dfrac{2-2a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)}$

$3 < a < 4 \Rightarrow a - 4 < 0 \Rightarrow 2(-4+a) < 0$

> Remarque : $3 < a < 4 \Rightarrow 6 < 2a < 8$
> $\Rightarrow 4 < 2a - 2 < 6 \Rightarrow 2a - 2 > 0$
> On a bien équivalence entre
> $\sqrt{\Delta} \geq 2a - 2$ et $(\sqrt{\Delta})^2 \geq (2a - 2)^2$

De plus, $2 - 2a + \sqrt{\Delta} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \geq 2a - 2 \Leftrightarrow \Delta \geq 4a^2 - 8a + 4 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-4) \geq 0$

$3 < a < 4 \Rightarrow a - 1 > 0$ et $3 < a < 4 \Rightarrow a - 4 < 0$

On en déduit donc par produit que $(a-1)(a-4) < 0$. En d'autres termes, $2 - 2a + \sqrt{\Delta} < 0$

Par suite, par quotient, $\dfrac{2-2a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} > 0$ ce qui équivaut à $x_2 - 1 > 0$ d'où $x_2 > 1$.

Comparaison de x_2 par rapport à 3

$x_2 - 3 = \dfrac{-6+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} - 3 = \dfrac{2-2a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} = \dfrac{18-6a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)}$

> Remarque : $3 < a < 4 \Rightarrow 18 < 6a < 24$
> $\Rightarrow 0 < 6a - 18 < 6$
> $\Rightarrow 6a - 18 > 0$
> On a bien équivalence entre
> $\sqrt{\Delta} \geq 6a - 18$ et $(\sqrt{\Delta})^2 \geq (6a - 18)^2$

$18 - 6a + \sqrt{\Delta} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \geq 6a - 18 \Leftrightarrow \Delta \geq 6^2(a-3)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 \geq 3(a^2 - 6a + 9)$

$\Leftrightarrow (a-3)(a-4) \leq 0$

D'une part, $3 < a < 4 \Rightarrow a - 4 < 0 \Rightarrow 2(-4+a) < 0$

D'autre part, $3 < a < 4 \Rightarrow (a-3)(a-4) < 0 \Leftrightarrow 18 - 6a + \sqrt{\Delta} > 0$

Par quotient, $\dfrac{18-6a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} < 0$ donc $x_2 - 3 < 0$ d'où $x_2 < 3$.

Bilan n°2 : si $3 < a < 4$, on a toujours $1 < x_2 < 3 < x_1$

Supposons à présent que $4 < a$

Comparaison de x_2 par rapport à 3

On a toujours $x_2 - 3 = \dfrac{-6+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} - 3 = \dfrac{2-2a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)} = \dfrac{18-6a+\sqrt{\Delta}}{2(-4+a)}$

$18 - 6a + \sqrt{\Delta} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \geq 6a - 18 \Leftrightarrow \Delta \geq 6^2(a-3)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 \geq 3(a^2 - 6a + 9)$

$\Leftrightarrow (a - 3)(a - 4) \leq 0$

L'inégalité $a > 4$ entraîne simultanément $a - 3 > 0$ et $a - 4 > 0$ donc $(a - 3)(a - 4) > 0$

Par suite cela entraîne que $18 - 6a + \sqrt{\Delta} < 0$

De plus $a > 4$ entraîne que $2(-4 + a) > 0$

Par quotient, il en résulte que $a > 4$ entraîne $\dfrac{18 - 6a + \sqrt{\Delta}}{2(-4 + a)} < 0$ donc $x_2 - 3 < 0$ d'où $x_2 < 3$.

Comparaison de x_2 par rapport à 1

On a toujours $x_2 - 1 = \dfrac{2 - 2a + \sqrt{\Delta}}{2(-4 + a)}$

$2 - 2a + \sqrt{\Delta} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \geq 2a - 2 \Leftrightarrow \Delta \geq 4a^2 - 8a + 4 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a - 4) \geq 0$

L'inégalité $a > 4$ entraîne simultanément $a - 1 > 0$ et $a - 4 > 0$ donc $(a - 1)(a - 4) > 0$

Par suite cela entraîne que $2 - 2a + \sqrt{\Delta} \geq 0$

De plus $a > 4$ entraîne que $2(-4 + a) > 0$

Par quotient, il en résulte que $a > 4$ entraîne $\dfrac{2 - 2a + \sqrt{\Delta}}{2(-4 + a)} > 0$ donc $x_2 - 1 > 0$ d'où $x_2 > 1$.

Comparaison de x_1 par rapport à 1

On a toujours : $x_1 - 1 = \dfrac{-6 - \sqrt{\Delta}}{2(-4 + a)} - 1 = \dfrac{2 - 2a - \sqrt{\Delta}}{2(-4 + a)}$

Comme $a > 4$ alors $-2a < -8$ et donc $2 - 2a < -6$ d'où $2 - 2a < 0$

De plus comme $-\sqrt{\Delta} \leq 0$ alors $2 - 2a - \sqrt{\Delta} < 0$ (somme de termes négatifs dont un est strictement négatif)

De plus $a > 4$ entraîne que $2(-4 + a) > 0$

Par quotient, il en résulte que $a > 4$ entraîne $\dfrac{2 - 2a - \sqrt{\Delta}}{2(-4 + a)} < 0$ donc $x_1 - 1 < 0$ d'où $x_1 < 1$.

BILAN N°3 : Si $a > 4$, alors $x_1 < 1 < x_2 < 3$

Dressons le tableau de variation de f_a selon la valeur de a en prenant en compte ce qui vient d'être fait.

1er cas : $a = 1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$h_1(x)$		$-$	0	$-$		$-$	
Signe de $f_a'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
Variation de f_a	1	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$ || $-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

2ème cas : $a = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$h_3(x)$		$-$		$-$	0	$-$	
Signe de $f_a'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
Variation de f_a	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$ || $\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

3ème cas : $a < 1$

Rappel Si $a < 1$ alors h_a admet 2 racines x_1 et x_2 telles que : $x_2 < 1 < x_1 < 3$

De plus h_a est du signe de $-4+a$ à l'extérieur des racines (comme $a < 1$ alors $a - 4 < 0$)

x	$-\infty$		x_2		1		x_1		3		$+\infty$
$h_a(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $f_a'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
Variation de f_a	1	$\searrow$	$f_a(x_2)$	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	$f_a(x_1)$	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	1

4ème cas : $1 < a < 3$

Rappel : Si $1 < a < 3$ alors h_a est strictement négative sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$h_a(x)$		$-$		$-$		$-$	
Signe de $f_a'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
Variation de f_a	1	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	1

5ème cas : $3 < a < 4$

Rappel : Si $3 < a < 4$ alors h_a admet 2 racines x_1 et x_2 telles que : $1 < x_2 < 3 < x_1$

De plus h_a est du signe de $-4+a$ à l'extérieur des racines (comme $a < 4$ alors $a - 4 < 0$)

x	$-\infty$		1		x_2		3		x_1		$+\infty$
$h_a(x)$		$-$			0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f_a'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
Variation de f_a	1	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$f_a(x_2)$	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	$f_a(x_1)$	$\searrow$	1

6ème cas : $a = 4$

Rappel : Si $a = 4$ alors $h_a(x) = 6x - 12$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$h_a(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f_a'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
Variation de f_a	1	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$f_4(2)$	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	1

7ème cas : $4 < a$

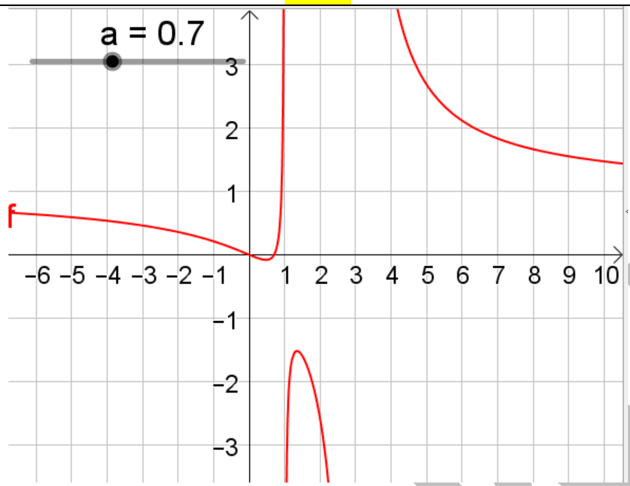
Rappel : Si 4< a alors h_a admet 2 racines x_1 et x_2 telles que : $x_1 < 1 < x_2 < 3$

De plus h_a est du signe de – 4+a à l'extérieur des racines (comme $a > 4$ alors $a - 4 > 0$)

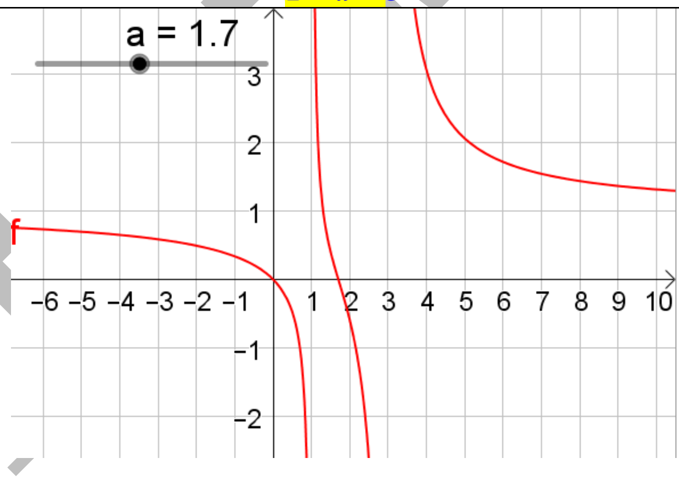
x	$-\infty$		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$h_a(x)$		+	0	–		–	0	+		+	
Signe de $f_a'(x)$		+	0	–	‖	–	0	+	‖	+	
Variation de f_a	1	↗	$f_a(x_2)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f_a(x_1)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

A l'aide de GEOGEBRA :

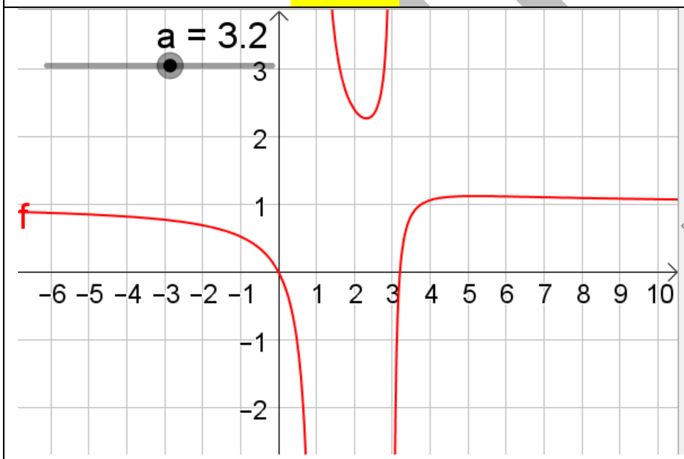
***a* < 1**



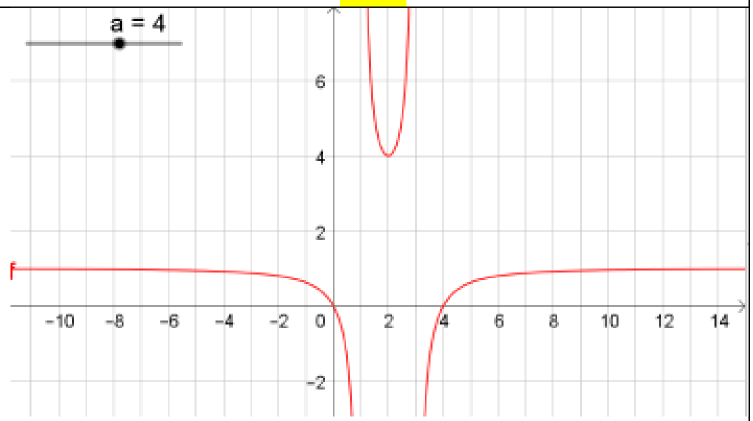
1 < *a* < 3



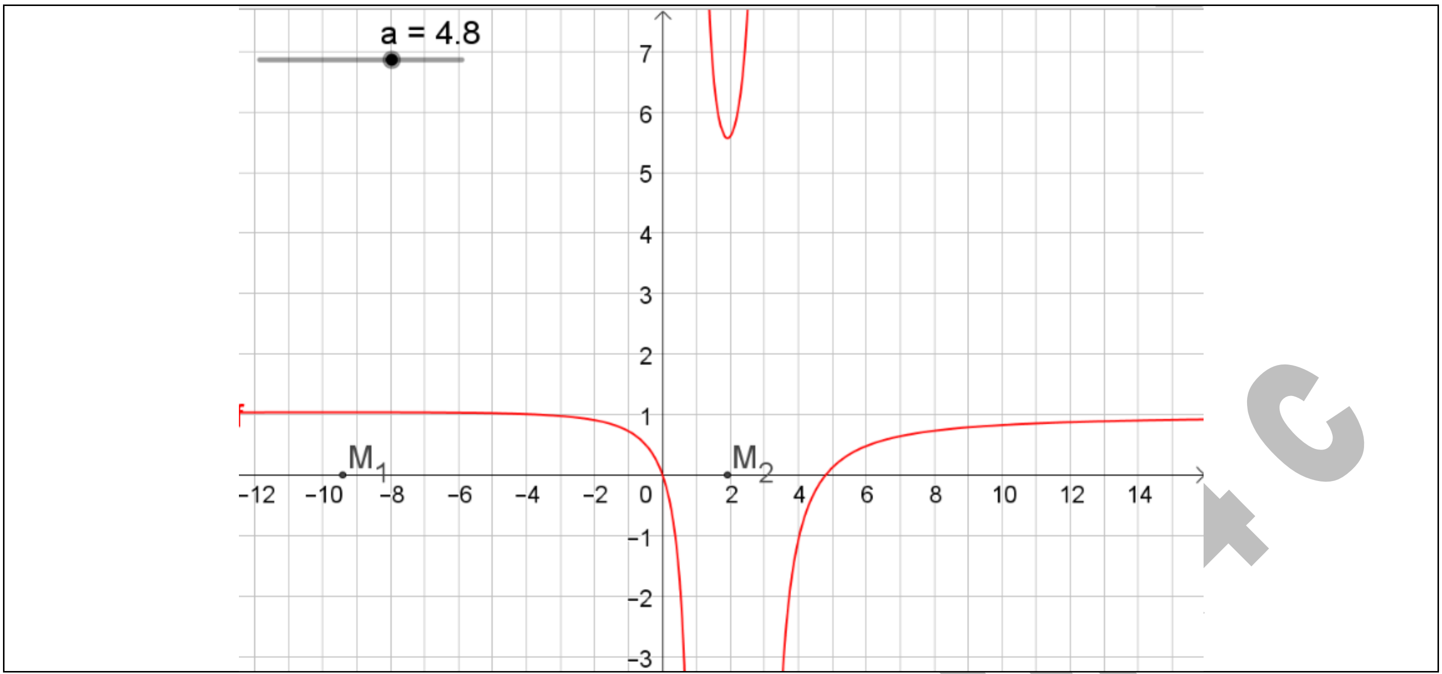
3 < *a* < 4



***a* = 4**



***a* > 4**



GEOGEBRA ne permet pas d'observer " réellement " les deux cas restants : cas $a = 1$ ou $a = 3$

BILAN FINAL :

Déterminer la (ou les valeurs) de a pour laquelle (ou lesquelles), la fonction f_a :

a. n'admet pas d'extremums sur D

Réponse : **lorsque $a \in [1\,;3]$**
Les limites ne sont pas des valeurs qui sont atteintes
Par exemple, quand vous avez $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, cela ne veut nullement dire que 1 est un minimum ou un maximum de la fonction (ce n'est pas une valeur atteinte par la fonction)…

b. admet un maximum et un minimum sur D

Réponse : **lorsque $a \in]-\infty\,; 1[\cup]3\,;4[$**

c. admet uniquement un extremum sur D.

Réponse : **lorsque $a = 4$**

Exercice 2

Dans le modèle d'étude du développement d'une population de bactéries, on estime que chaque quart d'heure, le nombre de bactéries double, puis diminue de 50.

On suppose que le nombre de bactéries présentes à l'instant $t = 0$ sur un aliment est égal à 100.

Les biologistes estiment l'alimentation impropre à la consommation lorsque le nombre de bactéries dépasse 500 000.

1. Proposer une méthode pour évaluer la durée au bout de laquelle la consommation de cet aliment risque de provoquer une intoxication alimentaire. (déjà traité en classe)

On peut noter u_n le nombre de bactéries au bout de n quart d'heures.

Selon l'énoncé, on a $u_0 = 100$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\,u_n - 50$

(u_n) est une suite arithmético -géométrique

Le(s) point(s) fixe(s) associé(s) à la fonction $f : x \mapsto 2x - 50$ est (sont) le(s) réel(s) x qui vérifie(nt) $f(x) = x$

Or $f(x) = x \Leftrightarrow 2x - 50 = x \Leftrightarrow x = 50$ (en fait ici, il n'y en a qu'un car on se retrouve avec une équation du 1er degré à une inconnu dont le coefficient a de l'inconnu est distinct de 1)

Ici, f n'admet qu'un seul point fixe.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 50$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 2\,u_n - 100 = 2\,(u_n - 50) = 2\,v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$, donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 2^n\,v_0 = 2^n\,(u_0 - 50) = 50 \times 2^n$

Comme pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 50$ alors $u_n = v_n + 50 = 50 \times 2^n + 50$

On peut remarquer que la suite (u_n) est croissante. En effet, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = 50 \times 2^{n+1} + 50 - (50 \times 2^n + 50) = 50 \times 2^{n+1} - 50 \times 2^n = 50 \times 2^n\,(2-1) = 50 \times 2^n$

Et comme pour tout n de $\mathbb{N}$, $50 \times 2^n > 0$, on a bien $u_{n+1} - u_n > 0$.

On peut utiliser une approche algorithmique qui détermine le premier entier naturel n_0 pour lequel $u_{n_0} > 500\,000$.

Comme la suite (u_n) est croissante, alors pour $n \geq n_0$ on a nécessairement $u_n \geq u_{n_0} > 500\,000$

Ainsi n_0 est l'entier n à partir duquel $u_n > 500\,000$

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  u PREND_LA_VALEUR 100
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (u<=500000) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR 2*u-50
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
14
***Algorithme terminé***
```

n	u_n	n	u_n
0	100	8	12850
1	150	9	25650
2	250	10	51250
3	450	11	102450
4	850	12	204850
5	1650	13	409650
6	3250	14	819250

2. Le résultat obtenu précédemment dépend -il du nombre de bactéries présentes à l'instant $t = 0$ sur l'aliment ? Expliquer.

On a établi que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = v_n + 50 = (u_0 - 50) \times 2^n + 50$

Le nombre de bactéries au bout de n quart d'heures dépend bien du nombre initial de bactéries u_0 à l'instant $t = 0$.

Exercice 4

A) Soit f la fonction définie par $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x-d}$ et C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$

Déterminer les réels a, b, c et d tels que :

- C a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 3$;
- C passe par les points A (1 ;5) et B (19 ;32).
- La tangente Γ au point d'abscisse 2 est parallèle à la droite D d'équation $y = 18x$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3a+b+ \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{c}{x-d}$

Comme C a pour asymptote verticale la droite d'équation x =3, cela implique que $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{c}{x-d} = \pm\infty$

En conséquence, cela exige que $x - d$ tende vers 0 quand x tend vers 3, on en déduit que $\boxed{d = 3}$

Par ailleurs, on sait que A (1,5) appartient à C donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = f(x)$ soit $5 = f(1)$ ou encore $a(1) + b - \dfrac{c}{2} = 5$

Comme B(19 ;36) appartient à C donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = f(x)$ soit $36 = f(19)$ ou encore $a(19) + b - \dfrac{c}{16} = 32$

Comme la tangente Γ au point d'abscisse 2 est parallèle à la droite D d'équation $y = 18x$, cela signifie que $f'(2) = 18$

Or pour tout x distinct de 3, $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x-3)^2}$

Il en résulte que $a - c = 18$

Finalement, les réels a, b et c vérifient : $\begin{cases} a+b-\dfrac{c}{2}=5 \\ 19a+b+\dfrac{c}{16}=32 \\ a=18+c \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} 18+c+b-\dfrac{c}{2}=5 \\ 19(18+c)+b+\dfrac{c}{16}=32 \\ a=18+c \end{cases}$

Ou encore $\begin{cases} \dfrac{c}{2}+b=-13 \\ b+\dfrac{305c}{16}=-310 \\ a=18+c \end{cases}$

En soustrayant membre à membre les deux premières égalités, il vient que : $\dfrac{297\,c}{16} = -297$ d'où $c = -16$

Puis $b = -13 - \dfrac{c}{2} = -13+8 = -5$

Enfin, on trouve $a = 2$

Réciproquement, on vérifie que les valeurs de a, b et c permettent de retrouver les données de l'énoncé.

Conclusion : $f(x) = 2x - 5 - \dfrac{16}{x-3}$

B) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ - {3} par $g(x) = 2x - 5 - \dfrac{16}{x-3}$ et C_g sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$

1. Déterminer le tableau de variation complet de g sur son domaine de définition.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ -{3}, $g'(x) = 2 + \dfrac{16}{(x-3)^2}$

On remarque que pour tout $x \neq 3$, $g'(x)$ est strictement positive comme somme de termes strictement positifs
Il en résulte que la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\,;3[$ et aussi sur $]\,3\,;+\infty[$.

Limite en $+\infty$	**Limite en $-\infty$**
$\lim\limits_{x\to+\infty} x-3 = +\infty$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16}{x-3} = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	De même un raisonnement analogue conduit à $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
Limite à gauche de g en 3 (par valeurs inférieures)	**Limite à droite de g en 3 (par valeurs supérieures)**
$\lim\limits_{x\to3^-} x-3 = 0^-$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ puis par produit $\lim\limits_{x\to3^-} -16 \times \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ Comme $\lim\limits_{x\to3^-} 2x-5 = 1$ alors par somme il vient que $\lim\limits_{x\to3^-} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to3^+} x-3 = 0^+$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ puis par produit $\lim\limits_{x\to3^+} -16 \times \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ Comme $\lim\limits_{x\to3^+} 2x-5 = 1$ alors par somme il vient que $\lim\limits_{x\to3^+} g(x) = -\infty$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $g'(x)$			||		
Variation de g	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

2. Déterminer les coordonnées des points communs de C_g avec les axes de coordonnées puis préciser la position relative de C_g par rapport à l'axe des abscisses.

Point méthode :

Pour déterminer les coordonnées de point(s) commun(s) à 2 courbes (C_1) et (C_2) d'équation respective $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$, on résout $f_1(x) = f_2(x)$ ou encore $\Delta(x) = 0$. Cela vous donne la ou les valeurs des abscisses des points communs, ensuite pour déterminer les ordonnées correspondantes, on remplace x par sa ou ses valeurs dans l'équation $y = f_1(x)$ ou $y = f_2(x)$

$M(x\,;y) \in C_g \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ g(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{(2x-5)(x-3)-16}{(x-3)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 2x^2 - 11x - 1 = 0 \text{ et } x \neq 3 \end{cases}$

Règle : $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et $B \neq 0$

Résolvons l'équation $2x^2 - 11x - 1 = 0$.
$\Delta = 11^2 - 4\,(2)\,(-1) = 129 > 0$

On en déduit les solutions : $\boxed{x_1 = \dfrac{11 - \sqrt{129}}{4} \approx -0{,}09}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{11 + \sqrt{129}}{4} \approx 5{,}59}$

Conclusion : La courbe C_g rencontre l'axe (Ox) en deux points P et Q de coordonnées respectives $(x_1\,;0)$ et $(x_2\,;0)$

$M(x\,;y) \in C_g \cap (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = g(0) \end{cases}$

Conclusion : La courbe C_g rencontre l'axe (Oy) en un point R de coordonnées respectives $(0\,;\frac{1}{3})$

3.

Point méthode :

Pour étudier la position relative de 2 courbes (C_1) et (C_2) d'équation respective $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$, on étudie le signe de la différence Δ définie par $\Delta(x) = f_2(x) - f_1(x)$
Remarque : on pourrait aussi étudier le signe de $x \mapsto f_1(x) - f_2(x)$

La position relative de la courbe C_g et de la droite (D) d'équation $y = 0$ est déterminée par le signe de la différence Δ définie par $\Delta(x) = g(x) - 0 = g(x)$.
Déterminons le signe de g sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

On a $g(x) = \dfrac{2x^2 - 11x - 1}{x - 3} = \dfrac{2\,(x - x_1)(x - x_2)}{x - 3} = 2\,\dfrac{h(x)}{x - 3}$ avec $h : x \mapsto (x - x_1)(x - x_2)$ qui est une fonction trinôme du second degré admettant x_1 et x_2 comme racines.

Le signe de $g(x)$ ne dépend que de celui de $\dfrac{h(x)}{x - 3}$

x	$-\infty$		x_1		3		x_2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Interprétation graphique :
C_g est strictement au-dessus (resp.au –dessous) de l'axe des abscisses sur $]x_1\,;3[\, \cup\,]x_2\,;+\infty[$
(resp. sur $]-\infty\,;x_1[\, \cup\,]3\,;x_2[$)
On retrouve le fait que C_g et l'axe (Ox) se rencontrent en deux points d'abscisse respective x_1 et x_2.

3. Etudier la position relative de C_g par rapport à la droite d'équation $y = 2x - 5$.

La position relative de la courbe C_g et de la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 5$ est déterminée par le signe de la différence Δ_1 définie par $\Delta_1(x) = g(x) - (2x - 5) = -\dfrac{16}{x - 3}$

Si $x > 3$ alors $x - 3 > 0$ et donc $-\dfrac{16}{x - 3} < 0$: la courbe C_g est strictement en dessous de la droite (Δ) sur $]3\,;+\infty[$

Si $x < 3$ alors $x - 3 < 0$ et donc $-\dfrac{16}{x - 3} > 0$: la courbe C_g est strictement au-dessus de la droite (Δ) sur $]-\infty\,;3[$.

Exercice 6

Partie 1 :

On considère l'algorithme ci-contre qui, à partir d'un entier naturel non nul N, en calcule un autre P.

```
Saisir N
P prend la valeur 1
    Pour i variant de 1 à N
        P prend la valeur P × i
    Fin Pour
Afficher P
```

1. Calculer à la main l'entier P pour $N = 1$, $N = 2$ et $N = 3$.

   Pour $N = 1$, on obtient en affichage pour P la valeur 1
   Pour $N = 2$, on obtient en affichage pour P la valeur 2
   Pour $N = 3$, on obtient en affichage pour P la valeur 6

2. A l'aide d'une calculatrice, mettre en œuvre l'algorithme.

TEXAS	CASIO
PROGRAM:FACTO :Prompt N :1→P :For(I,1,N) :P*I→P :End :Disp P	======FACTO ====== ?→N↵ 1→P↵ For 1→I To N↵ P×I→P↵ Next↵ P◢ TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR

3. Calculer au moyen de cet algorithme les valeurs de P pour N variant entre 1 et 10.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

4. Déterminer une formule qui relie P à N pour un entier naturel N quelconque.

   ☞ Ce nombre P s'écrit N ! et se lit « factorielle N » et par convention 0 ! =1.

   Si $N = 0$, alors $P = 1$

   Et si $N \neq 0$, alors $P = N\,! = \underbrace{\prod_{k=1}^{N} k}_{\text{produit des entiers consécutifs de 1 à } N} = 1\times2\times3\times\ldots\times n$

Partie 2 :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (e_n) définies sur ℕ* par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\,,\ v_n = u_n + \frac{1}{n \times n\,!} \text{ et } e_n = v_n - u_n$$

1. A l'aide d'une calculatrice, écrire un programme permettant de calculer et d'afficher les termes u_n , v_n et e_n lorsque l'utilisateur saisit la valeur de n.

```
VARIABLES
    N EST_DU_TYPE NOMBRE
    P EST_DU_TYPE NOMBRE
    i EST_DU_TYPE NOMBRE
    u EST_DU_TYPE NOMBRE
    v EST_DU_TYPE NOMBRE
    e EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  P PREND_LA_VALEUR 1
  u PREND_LA_VALEUR 1
  POUR i ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
      P PREND_LA_VALEUR P*i
      u PREND_LA_VALEUR u+1/P
    FIN_POUR
  v PREND_LA_VALEUR u+1/(N*P)
  e PREND_LA_VALEUR 1/(N*P)
  AFFICHER u
  AFFICHER v
  AFFICHER e
FIN_ALGORITHME
```

2. Donner u_n, v_n et e_n pour n variant de 1 à 5.

n	1	2	3	4	5
u_n	2	$\frac{5}{2}=2{,}5$	$\frac{8}{3}\approx 2{,}67$	$\frac{65}{24}\approx 2{,}708$	$\frac{163}{60}\approx 2{,}717$
v_n	3	$\frac{11}{4}=2{,}75$	$\frac{49}{18}\approx 2{,}72$	$\frac{261}{96}=2{,}71875$	$\frac{1631}{600}\approx 2{,}718$
e_n	1	$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{1}{18}\approx 0{,}056$	$\frac{1}{96}\approx 0{,}0104$	$\frac{1}{600}\approx 0{,}00167$

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Algorithme lancé Entrer N : 1 2 3 1	***Algorithme lancé*** Entrer N : 2 2.5 2.75 0.25	***Algorithme lancé*** Entrer N : 3 2.6666667 2.7222222 0.055555556	***Algorithme lancé*** Entrer N : 4 2.7083333 2.71875 0.010416667	***Algorithme lancé*** Entrer N : 5 2.7166667 2.7183333 0.0016666667

3. Emettre une conjecture à propos :

a. Du sens de variation des deux suites (u_n) et (v_n) ;

b. De la convergence des deux suites (u_n) et (v_n) ;

c. De la convergence de la suite (e_n).

Il semble que la suite (u_n) (respectivement la suite (v_n)) est strictement croissante (resp. décroissante).

De plus (u_n) et (v_n) semblent toutes deux convergentes vers un même réel puisque (e_n) semble tendre vers 0.

Le terme e_n mesure l'écart entre u_n et v_n et cet écart diminue au fur et à mesure que n augmente….

Partie C :

1. Montrer pour tout $n \geq 1$, que $u_n \leq v_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n\,!}$ donc $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n\,!}$

Et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n \times n\,!} \geq 0$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq u_n$

2. Déterminer une relation entre $(n+1)\,!$ et $n\,!$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(n+1)\,! = \underbrace{1\times2\times3\times\ldots\times n}_{n!}\times(n+1) = (n+1)\times n\,!$

3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k\,!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!} = \underbrace{\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}}_{u_{n+1}} - \overbrace{\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)}^{u_n} = \frac{1}{(n+1)\,!}$$

Comme pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)\,!} > 0$.

On en déduit alors que la suite (u_n) est bien strictement croissante.

Par ailleurs, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n \times n\,!}\right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)\,!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n\,!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

Comme pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$.

On en déduit alors que la suite (v_n) est bien strictement décroissante.

4. ***a.*** Montrer que la suite (u_n) est majorée par v_1.

La suite (v_n) étant strictement décroissante, on en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \leq v_1$

(☞ on peut même écrire " $v_n < v_1$ ", mais on n'a pas besoin de cette précision…)

On a prouvé en **C.1.**, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$

Il en résulte alors que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_1$ ce qui signifie bien que la suite (u_n) est majorée par v_1.

b. Démontrer de même que la suite (v_n) est minorée.

La suite (u_n) étant strictement croissante, on en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq u_1$

(☞ on peut même écrire " $u_n > u_1$ ", mais on n'a pas besoin de cette précision…)

On a prouvé en **C.1.**, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$

Il en résulte alors que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \geq u_1$ ce qui signifie bien que la suite (v_n) est minorée par u_1.

5. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

(u_n) est croissante et majorée par v_1, donc selon le théorème de convergences des suites monotones, (u_n) converge vers un réel ℓ_1 tel que $\ell_1 \leq v_1$.

De même, (v_n) étant décroissante et minorée par u_1, est aussi convergente vers un réel ℓ_2 tel que $\ell_2 \geq u_1$.

6. ***a.*** Montrer que $n \times n\,! \geq n$, pour $n \geq 1$.

Pour $n \geq 1$, $n\,!$ est le produit des entiers consécutifs de 1 à n, en conséquence $n! \geq 1$ et donc $n \times n\,! \geq n$

b. En déduire la limite de la suite (e_n).

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient que $\dfrac{1}{n \times n\,!} \leq \dfrac{1}{n}$

De plus il est clair que l'on a : $0 \leq \dfrac{1}{n \times n\,!}$ (☞ l'inverse d'un réel strictement positif est positif)

<u>**Conclusion**</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n \times n\,!}} \leq \dfrac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n \times n\,!}} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$

7. Déduire des questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite ℓ.

On sait que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = e_n$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \ell_2 - \ell_1$

Par unicité de la limite de (e_n), il vient que $\ell_2 - \ell_1 = 0$ d'où $\ell_2 = \ell_1$

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.

Exercice 7

Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + a = 2017$ admet au moins une solution et ce quelle que soit la valeur de a.

Soit a un réel quelconque et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + a - 2017$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = x^3 = +\infty$ (limite à l'infini d'une fonction polynôme)

f_a étant une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $0 \in \left] \lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) \right[= \mathbb{R}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_a(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

On a donc prouvé que quelle que soit la valeur du réel a, l'équation $x^3 - 3x^2 + a - 2017 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$ ce qui revient à dire que l'équation $x^3 - 3x^2 + a = 2017$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On aurait pu introduire directement la fonction g_a définie sur $\mathbb{R}$ par $g_a(x) = x^3 - 3x^2 + a$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x) = x^3 = +\infty$ (limite à l'infini d'une fonction polynôme)

g_a étant une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $2017 \in \left] \lim\limits_{x\to-\infty} g_a(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x) \right[= \mathbb{R}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g_a(x) = 2017$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

On a donc prouvé que quelle que soit la valeur du réel a, l'équation $x^3 - 3x^2 + a = 2017$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$