u et v sont des suites définies pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
Démontrer que les suites u et v sont adjacentes.

CORRECTION

Il faut d'abord trouver le sens de variation des deux suites (u_n) et (v_n).

$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$

donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est (strictement) croissante.

$v_n = u_n + \frac{1}{n}$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)}$

donc $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}$

or $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2}$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$

La suite (v_n) est (strictement) décroissante.

Il faut maintenant montrer que l'écart entre les deux termes de même rang des deux suites tend vers 0 (soit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ ou que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$).

$v_n = u_n + \frac{1}{n}$ donc $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$

La suite (u_n) est (strictement) croissante, la suite (v_n) est (strictement) décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$ donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.