Déterminer la limite en $\frac{\pi}{4}$ de $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$

CORRECTION

Méthode générale

On peut depuis le début poser $h = x - \frac{\pi}{4}$ donc remplacer x par $h + \frac{\pi}{4}$ dans $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$

Il faut alors développer $\frac{\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{4\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \pi}$ ce qui conduit après simplification à $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sin h}{h}$ puis ensuite chercher la limite en 0 de cette expression.

Méthode particulière : au lieu de poser $h = x - \frac{\pi}{4}$, on développe $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ à la recherche de simplification d'écriture.

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x$ donc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x)$

donc $\sin x - \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$4x - \pi = 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ donc $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$

En posant $h = x - \frac{\pi}{4}$ on obtient : $\frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sin h}{h}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} h = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4}$