Amérique du Nord mai 2007

EXERCICE 1 (3 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$. Soit A le point de coordonnées (1 ; 11 ; 7).

Proposition 1 :

« Le point H, projeté orthogonal de A sur (P), a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1) ».

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.

On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0) = 0$.

Proposition 2 : «On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ».

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 67$ ».

EXERCICE 2 (5 points) Pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).

Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

a. Déterminer une écriture complexe de r.

b. Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d. Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, − 1 et 2.

a. Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer le point D.

b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.

a. Déterminer une écriture complexe de h.

b. Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.

4. a. Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b. En déduire la nature du triangle CDE.

EXERCICE 2 (5 points) Pour les candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique : 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par :

$$z' = (2 - 2i)z + 1.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. *a*. Déterminer l'affixe du point B′ image du point B par f.

b. Montrer que les droites (CB′) et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M′ l'image de M par f.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple (− 4 ; 2) est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [− 5 ; 5] et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.

EXERCICE 3 5 points
Commun à tous les candidats
Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

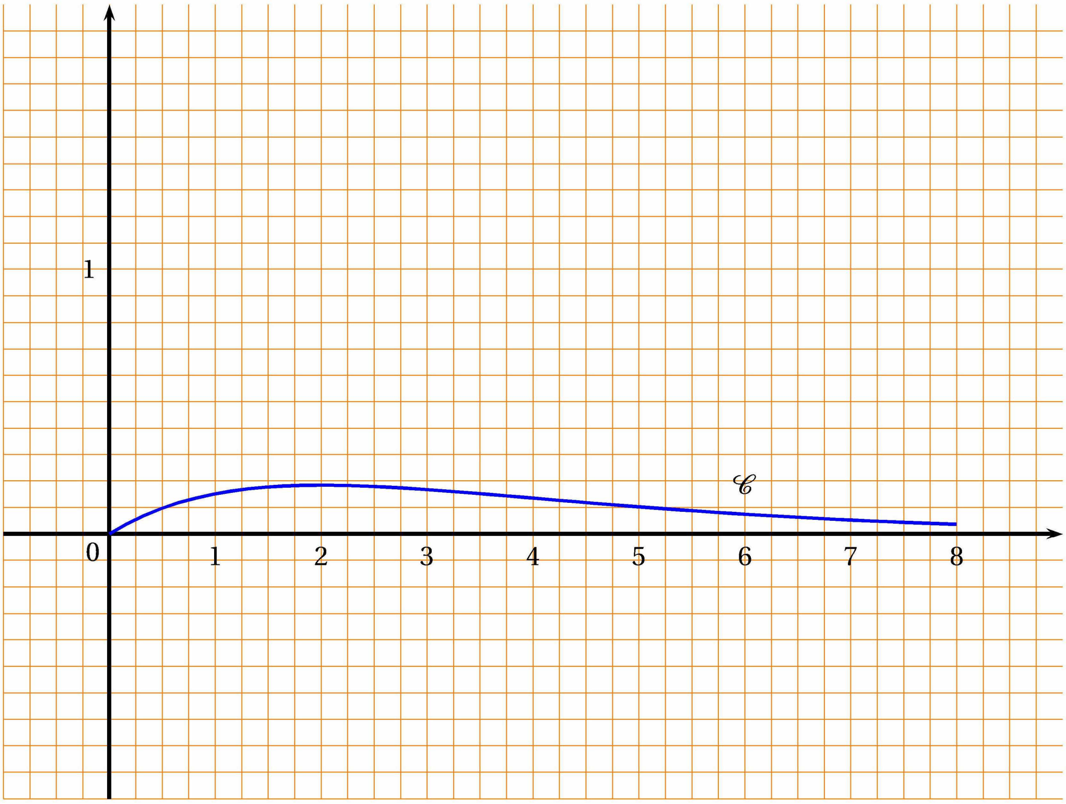
1. On appelle :
E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ;
E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
b. Montrer que la probabilité de l'évènement ($X = 2$) est égale à 0,031 et que celle de l'évènement ($X = 3$) est égale à 0,002.
c. Déterminer la loi de probabilité de X.
d. Calculer l'espérance de X.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note En l'évènement : « le joueur perd la n-ième partie », E_n l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des évènements $E_n \setminus E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .
b. En déduire que $p_{n+1} = 0,05 + 0,05\, p_n$ pour tout entier naturel n non nul.
3. On considère la suite (un) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.
a. Montrer que (un) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.
c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats
1. Restitution organisée de connaissances.
L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur R et est égale à sa fonction dérivée ;
- $e^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $e^x > x$.
- Soient deux fonctions ' et A définies sur l'intervalle [A ; + ∞ [où A est un réel positif.
  Si pour tout x de [A ; + ∞ [, $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

a. On considère la fonction g définie sur [0 ; + ∞ [par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de [0 ; + ∞ [, $g(x) \geq 0$.
b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
2. On appelle f la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $f(x) = \dfrac{1}{4} x\, e^{-\frac{x}{2}}$.
On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe C est représentée en annexe.
a. Montrer que f est positive sur [0 ; + ∞[.
b. Déterminer la limite de f en + ∞. En déduire une conséquence graphique pour C .
c. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur [0 ; + ∞ [.
3. On considère la fonction F définie sur [0 ; +1[par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.
a. Montrer que F est une fonction strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.
b. Montrer que $F(x) = F(x) = -\dfrac{1}{2} x\, e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} + 1$
c. Calculer la limite de F en + ∞ et dresser le tableau de variations de F sur [0 ; + ∞ [.
d. Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.
4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq 0,5$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 4



CORRECTION

EXERCICE 1

1. FAUX

A est le point de coordonnées (1 , 11, 7)
H est le point de coordonnées (0 , 2 , 1)
$\overrightarrow{HA}$ est le vecteur de coordonnées (1 , 9 , 6)
Le vecteur $\vec{n}$ normal au plan P a pour coordonnées (2 , 1 , – 3)
$\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc (AH) n'est pas orthogonale au plan P donc H n'est pas le projeté orthogonal de A sur P.

2. VRAI

Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2 - 2y$ sont de la forme $f(x) = C e^{-2x} + 1$
u est solution de l'équation et $u(0) = 0$ donc C + 1 = 0
$u(x) = 1 - e^{-2x}$
$e^{-2\frac{\ln 2}{2}} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$ donc $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3. VRAI

Par un raisonnement par récurrence :
$u_0 = 2$ et $0 \leq u_0 \leq 7$ la propriété est vraie pour $n = 0$
Supposons qu'il existe un rang n tel que $0 \leq u_n \leq 7$
Montrons que la propriété est héréditaire
$0 \leq u_n \leq 7$ donc $0 \leq 7\,u_n \leq 7^2$
donc $0 \leq \sqrt{7\,u_n} \leq 7$ soit $0 \leq u_{n+1} \leq 7$
La propriété est vraie pour $n + 1$ donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

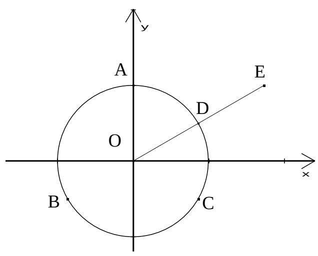
EXERCICE 2 non spécialité

1. *a*. L'écriture complexe d'une rotation de centre Ω (ω) d'angle θ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
donc ici, $\omega = 0$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$ donc l'écriture complexe de r est $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ ou $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

1. *b*. L'image de B par la rotation est C tel que :
$z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B$
soit $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow z_C = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1. *c*. $z_B = \cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}$ soit $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
et $z_C = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$ soit $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

1. *d*.



2. *a*. $(2 - 1 + 2)\ \overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\,\overrightarrow{OC}$
donc $3\,z_D = 2\,z_A - z_B + 2\,z_C$
$3\,z_D = 2\,i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i$
$3\,z_D = \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2. *b*. OA = $| z_A | = 1$
OB = $| z_B | = 1$
OC = $| z_C | = 1$
OD = $| z_D | = 1$ donc A, B, C, D sont sur le cercle de centre O de rayon 1.

3. *a*. h est une homothétie de centre A de rapport 2 donc une écriture complexe de h est $z' - z_A = 2\,(z - z_A)$
soit $z' - \mathrm{i} = 2\,(z - \mathrm{i})$ ou $z' = 2\,z - \mathrm{i}$

3. *b*. E est l'image de D par h donc $z_E = 2\,z_D - \mathrm{i}$
$z_E = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) - \mathrm{i}$ donc $z_E = \sqrt{3}$.

4. *a*. $z_D - z_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$z_E - z_C = \sqrt{3} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

donc $| z_D - z_C | = | z_E - z_C |$ donc le triangle CDE est isocèle en C

et arg $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi\ (k \in \nearrow)$ donc $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi\ (k \in \nearrow)$

le triangle CED est isocèle et *a* une angle de $\dfrac{\pi}{3}$ donc il est équilatéral direct.

EXERCICE 2 spécialité

1. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$ donc f est une similitude direct de rapport $| a | = 2\sqrt{2}$ et d'angle arg $a = -\dfrac{\pi}{4}$.

Le centre Ω (ω) de la similitude est le point invariant donc ω est solution de $z = (2 - 2\,\mathrm{i})\,z + 1$
soit $(-1 + 2\,\mathrm{i})\,z = 1$
$(-1 + 2\,\mathrm{i})(-1 - 2\,\mathrm{i})\,z = (-1 - 2\,\mathrm{i})$
$z = \dfrac{-1 - 2\,\mathrm{i}}{5}$ donc Ω a pour affixe $-\dfrac{1}{5} - \mathrm{i}\,\dfrac{2}{5}$

2. *a*. B' est l'image de B par f donc $z_{B'} = (2 - 2\,\mathrm{i})\,z_B + 1$
$z_{B'} = (2 - 2\,\mathrm{i})(-4 + 2\,\mathrm{i}) + 1$
$z_{B'} = -8 + 4\,\mathrm{i} + 8\,\mathrm{i} + 4 + 1$
$z_{B'} = -3 + 12\,\mathrm{i}$

$z_{B'} - z_C = -3 + 12\,\mathrm{i} - (1 + 4\,\mathrm{i}) = -4 + 8\,\mathrm{i} = 4\,(-1 + 2\,\mathrm{i})$
$z_A - z_C = 3 + 5\,\mathrm{i} - (1 + 4\,\mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i}$
donc $\mathrm{i}\,(z_A - z_C) = 2\,\mathrm{i} - 1$ donc $z_{B'} - z_C = 4\,\mathrm{i}\,(z_A - z_C)$
$\dfrac{z_{B'} - z_C}{z_A - z_C} = 4\,\mathrm{i}$ donc arg $\dfrac{z_{B'} - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \nearrow)$ donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \nearrow)$
les droites (CA) et (CB') sont donc orthogonales.

3. M' est le point d'affixe z' avec $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$, x' et y' réels
$z' = (2 - 2\,\mathrm{i})\,z + 1$ donc $x' + \mathrm{i}\,y' = (2 - 2\,\mathrm{i})(x + \mathrm{i}\,y) + 1$
$x' = 2\,x + 2\,y + 1$ et $y' = -2\,x + 2\,y$
$\overrightarrow{CA}$ a pour coordonnées (2 ; 1) $\overrightarrow{CM'}$ a pour coordonnées $(x' - 1\ ;\ y' - 4)$ soit $(2\,x + 2\,y\ ;\ -2\,x + 2\,y - 4)$
$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CM'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CM'} = 0$
$\Leftrightarrow 2\,(x' - 1) + (y' - 4) = 0$
$\Leftrightarrow 2\,(2\,x + 2\,y) + (-2\,x + 2\,y - 4) = 0$
$\Leftrightarrow 2\,x + 2\,y - x + y - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x + 3\,y - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x + 3\,y = 2$

4. *a*. $-4 + 2 \times 3 = 2$ donc $(-4\ ;\ 2)$ est solution de (E)

4. *b*. La question est particulièrement stupide !

$x + 3y = 2$ donc si y est un entier relatif quelconque, il suffit de choisir $x = 2 - 3y$, on a bien $x \in \nearrow$.

La vérification est immédiate

donc les solutions de (E) sont de la forme $(2 - 3y ; y)$ avec $y \in \nearrow$

4. *c*. $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CM'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow x + 3y = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 3y$ avec $y \in \nearrow$

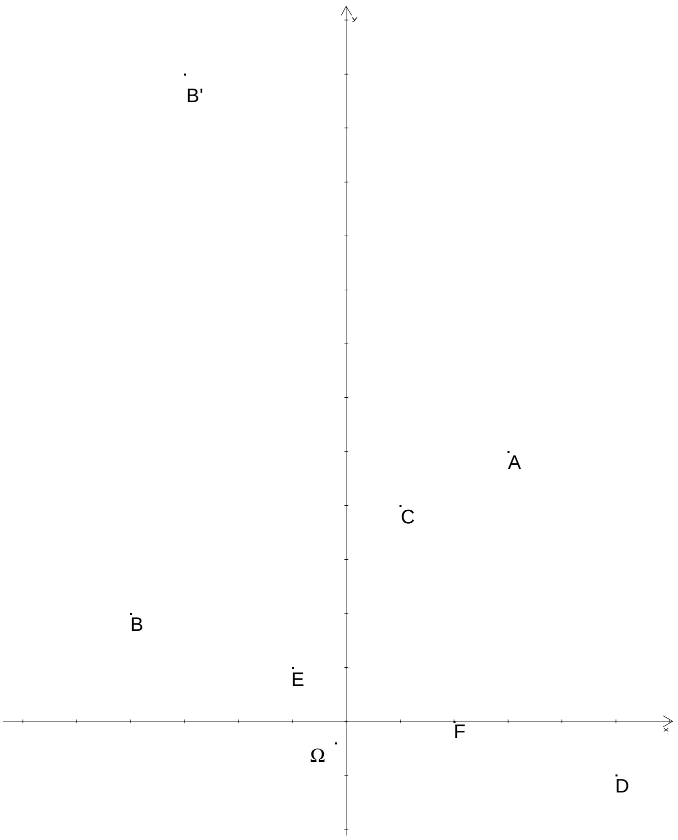
On cherche des points M donc les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5 ; 5]$

il faut donc que $y \in [-5 ; 5]$ et $2 - 3y \in [-5 ; 5]$

$-5 \leq 2 - 3y \leq 5 \Leftrightarrow -7 \leq -3y \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \dfrac{7}{3}$

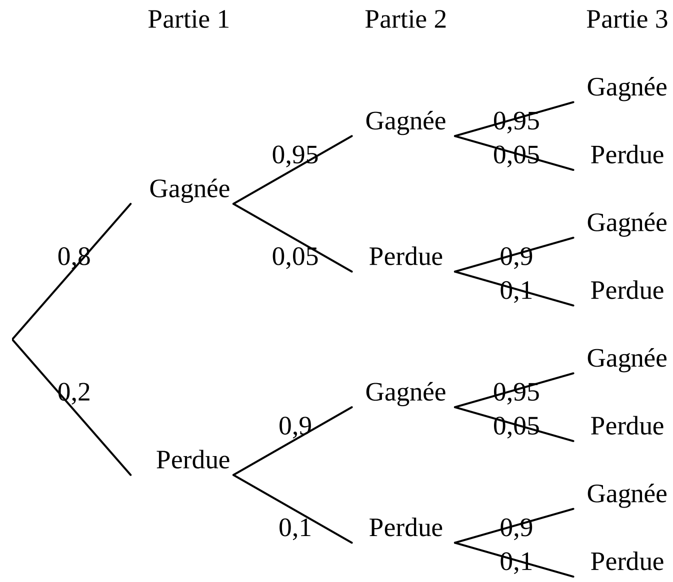
on doit donc avoir simultanément $y \in [-5 ; 5]$ et $-1 \leq y \leq \dfrac{7}{3}$

donc $y \in \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ et comme $x = 2 - 3y$ on trouve les points de coordonnées $(5 ; -1)$ $(2 ; 0)$ $(-1 ; 1)$ $(-4 ; 2)$



EXERCICE 3

1.



Le joueur peut perdre 3 fois, 2 fois, 1 fois ou 0 fois donc X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3.

$p(\mathrm{X} = 2) = p(\overline{\mathrm{E}_1} \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3) + p(\mathrm{E}_1 \cap \overline{\mathrm{E}_2} \cap \mathrm{E}_3) + p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \overline{\mathrm{E}_3})$

$= 0{,}8 \times 0{,}05 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}05 + 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}9$

$= 0{,}031$

$p(\mathrm{X} = 3) = p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3) = 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}002$

1. *c.* $p(\mathrm{X} = 0) = 0{,}8 \times 0{,}95 \times 0{,}95 = 0{,}722$

$p(\mathrm{X} = 1) = 0{,}8 \times 0{,}95 \times 0{,}05 + 0{,}8 \times 0{,}05 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}95$

$p(\mathrm{X} = 1) = 0{,}245$

k	0	1	2	3
$p(\mathrm{X} = k)$	0,722	0,245	0,031	0,002

On peut vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

1. *d.* $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0{,}313$

2. *a.* $p(\mathrm{E}_n \cap \mathrm{E}_{n+1}) = p(\mathrm{E}_{n+1} / \mathrm{E}_n) \times p(\mathrm{E}_n) = 0{,}1\, p_n$

$p(\overline{\mathrm{E}_n} \cap \mathrm{E}_{n+1}) = p(\mathrm{E}_{n+1} / \overline{\mathrm{E}_n}) \times p(\overline{\mathrm{E}_n}) = 0{,}05\,(1 - p_n)$

2. *b.* $p_{n+1} = p(\mathrm{E}_{n+1}) = p(\mathrm{E}_n \cap \mathrm{E}_{n+1}) + p(\overline{\mathrm{E}_n} \cap \mathrm{E}_{n+1})$

$p_{n+1} = 0{,}1\, p_n + 0{,}05\,(1 - p_n)$

$p_{n+1} = 0{,}05 + 0{,}05\, p_n$

3. *a.* $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$ donc $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{19}$ or $p_{n+1} = 0{,}05 + 0{,}05\, p_n$ donc en remplaçant : $u_{n+1} = 0{,}05 + 0{,}05\, p_n - \dfrac{1}{19}$

$u_{n+1} = 0{,}05\, p_n - \dfrac{0{,}05}{19}$ or $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$ donc $p_n = u_n + \dfrac{1}{19}$

$u_{n+1} = 0{,}05\left(u_n + \dfrac{1}{19}\right) - \dfrac{0{,}05}{19}$

$u_{n+1} = 0{,}05\, u_n$

$u_1 = p_1 - \dfrac{1}{19} = 0{,}2 - \dfrac{1}{19} = \dfrac{2{,}8}{19}$

donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = \dfrac{2{,}8}{19}$ de raison $q = 0{,}05$

3. *b.* $u_n = q^{n-1}\, u_1 = 0{,}05^{\,n-1} \times \dfrac{2{,}8}{19}$

donc $p_n = u_n + \dfrac{1}{19}$ soit $p_n = 0{,}05^{\,n-1} \times \dfrac{2{,}8}{19} + \dfrac{1}{19}$

3. *c.* $-1 < 0{,}05 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}05^{\,n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{19}$.

EXERCICE 4

1\. *a*. g est définie continue dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(x) = e^{x} - x$
la fonction g' est définie continue dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g''(x) = e^{x} - 1$
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc si $x \geq 0$, $e^{x} \geq 1$ donc $g''(x) \geq 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
donc g' est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
$g'(0) = 1$ donc pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g'(x) > 0$
donc g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
$g(0) = 1$ donc pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 0$.

1\. *b*. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 0$ donc $e^{x} \geq \dfrac{x^{2}}{2}$. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{e^{x}}{x} \geq \dfrac{x}{2}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$.

2\. *a*. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $e^{-\frac{x}{2}} > 0$
$x \geq 0$ donc f est positive sur $[0\,;+\infty[$.

2\. *b*. Soit $h = \dfrac{x}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h = +\infty$; $x\,e^{-\frac{x}{2}} = 2\,h\,e^{-h}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-\frac{x}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
C_f admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote en $+\infty$.

2\. *c*. $f'(x) = \dfrac{1}{4}\,e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{8}\,x\,e^{-\frac{x}{2}} = \dfrac{2-x}{8}\,e^{-\frac{x}{2}}$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	0	↗	M	↘	0

$M = \dfrac{1}{2}\,e^{-1}$.

3\. *a*. f définie continue sur $[0\,;+\infty[$ donc F est la primitive nulle en 0 de f.
donc $F'(x) = f(x)$ or f est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$, nulle en 0 donc F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3\. *b*. Par intégration par parties, en posant $u'(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ donc $u(t) = -2\,e^{-\frac{t}{2}}$ et $v(t) = \dfrac{1}{4}\,t$ donc $v'(t) = \dfrac{1}{4}$ on obtient :

$$F(x) = \left[\frac{1}{4}\,t \times \left(-2\,e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{2}\,e^{-\frac{t}{2}}\,dt \text{ donc } F(x) = -\frac{1}{2}x\,e^{-\frac{x}{2}} - \left[e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x \text{ donc } F(x) = -\frac{1}{2}x\,e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} + 1$$

3\. *c*. d'après la question 2. *b*. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-\frac{x}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

x	0		$+\infty$
$F'(x)$		+ –	
F	0	↗	1

3\. *d*. La fonction F est définie continue, strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $F([0\,;+\infty[) = [0\,;1[$ de plus $0{,}5 \in [0\,;1[$ donc l'équation $F(x) = 0{,}5$ admet une seule solution α sur $[0\,;+\infty[$.

$F(3{,}35) \approx 0{,}49895062$ et $F(3{,}36) \approx 0{,}500517744$
F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $3{,}35 < \alpha < 3{,}36$ soit $\alpha = 3{,}36$ à 10^{-2} près par excès.

4\. $A_n = F(n)$ donc $A_n \geq 0{,}5 \Leftrightarrow F(n) \geq 0{,}5$
F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $F(\alpha) = 0{,}5$ donc $n \geq \alpha$
n est un nombre entier et $\alpha \approx 3{,}36$ donc le plus petit entier n tel que $A_n \geq 0{,}5$ est $n = 4$