Asie juin 2017

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre, t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure, d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure, a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en + ∞ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur [0 ; + ∞ [par : $C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur [0 ; + ∞ [.

2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)$.

Démontrer que, pour tout réel x de] 0 ; + ∞ [, $f'(x) = \frac{105\,g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
g	0 ↘	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.

On ne demande pas les limites de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur l'intervalle [1 ; 80].

En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : $C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$.

1 On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.

b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.

Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n.$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)\,u_n$.

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent millième.

Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B_3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2. *a.* Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer cette conjecture.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,25000	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.

Affirmation 1 : la probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.

2. Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_N = \frac{3-i}{2+i}$.

Affirmation 2 : la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans les questions 3. et 4., on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et l'on considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2, \\ z = 3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

3. On considère les points A, B et C avec A $(-2 ; 2 ; 3)$, B $(0 ; 1 ; 2)$ et C $(4 ; 2 ; 0)$.
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.
Affirmation 3 : la droite d est orthogonale au plan (ABC).

4. On considère la droite Δ passant par le point D $(1 ; 4 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}$ $(2 ; 1 ; 3)$.
Affirmation 4 : la droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 4 3 points Commun à tous les candidats

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.
2. Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : estimation de la valeur de J

Soit g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

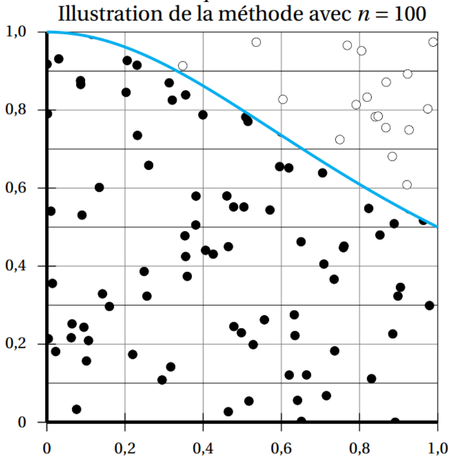
On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a donc : $J = \int_0^1 g(x)\,dx$.

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.
On choisit au hasard un point M(x ; y) en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur [0 ; 1].
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe C_g est égale à l'intégrale J.
En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :
— on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur [0 ; 1] ;
— si M(x ; y) est au-dessous de la courbe C_g on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \frac{c}{n}$ est une valeur approchée de J. C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.



1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de n
	c prend la valeur ...
	Pour i allant de 1 à ... faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend ...
	    Si ... alors
	        ... prend la valeur ...
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur ...

Sortie	Afficher f

2. Pour $n = 1000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0{,}781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J.

3. Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Question préliminaire Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} \, dt$.

Démontrer que, pour tout réel a positif, $P(T > a) = e^{-\lambda a}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2\,800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près.

Partie A : étude d'un exemple

1. Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.

2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %.

Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.

On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.

Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.

Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.

On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7{,}3$.

1. Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.

2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes.
Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 % ?

EXERCICE 5 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A : ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :

— elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;

— elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1 - p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.

Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :

— p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;

— q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.On définit les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $\quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

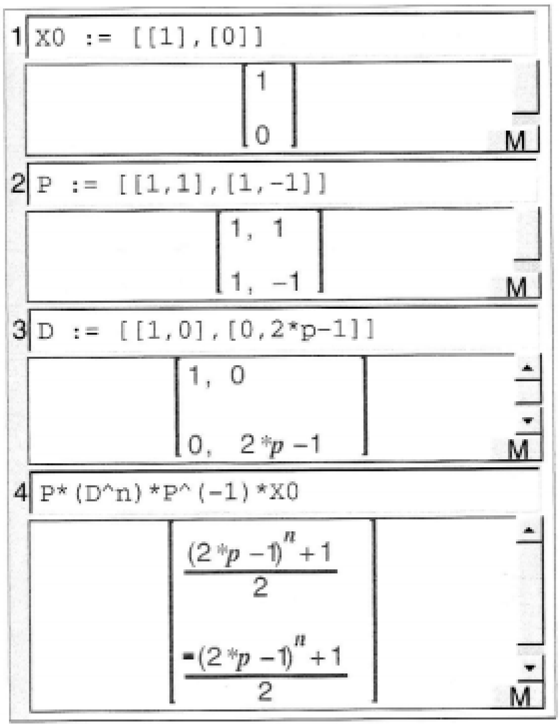
On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = A\,X_n$ et donc, $X_n = A^n X_0$

1. *a*. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$. Vérifier que : $A = P\,D\,P^{-1}$.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

d. En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-contre, déterminer l'expression de q_n en fonction de n.



2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25. Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission ?

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On rappelle qu'un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.

Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.

On ajoute à cette liste une clé de contrôle $c_1 c_2 c_3$ formée de trois bits :

— c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;

— c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;

— c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires

***a*.** Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

***b*.** Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1 b_2 b_3 b_4$ un mot de 4 bits et $c_1 c_2 c_3$ la clé associée.

Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :

- la valeur de c_1 est inchangée ;
- la valeur de c_2 est modifiée ;
- la valeur de c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.

Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

5. Voici deux messages de 7 bits : A = 0100010 et B = 1101001.

On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission. Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'un cas particulier

1. $C'(t) = 12 \times \left(-\left(-\frac{7}{80}\right) e^{-\frac{7}{80}t} \right) = \frac{21}{40} e^{-\frac{7}{80}t}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $C'(t) > 0$
La fonction C est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.

2. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $1 - e^{-\frac{7}{80}t} < 1$ donc pour tout $t \geq 0$, $C'(t) < 12$
Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient n'est pas efficace.

Partie B : étude de fonctions

1. Soit $\begin{cases} u(x) = \frac{105}{x} & u'(x) = -\frac{105}{x^2} \\ v(x) = 1 - e^{-\frac{3}{40}x} & v'(x) = \frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x} \end{cases}$ donc $f'(x) = -\frac{105}{x^2}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{105}{x} \times \frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x}$

$f'(x) = \frac{105}{x^2}\left(-\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{3}{40} x e^{-\frac{3}{40}x} \right)$ donc $f'(x) = \frac{105}{x^2}\left(-1 + e^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3}{40} x e^{-\frac{3}{40}x} \right)$

Donc, pour tout réel x de] 0 ; + ∞ [, $f'(x) = \frac{105\, g(x)}{x^2}$ avec $g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1$

2. La fonction g est décroissante sur] 0 ; + ∞ [et $g(0) = 0$ donc pour tout réel x de [0 ; + ∞ [, $g(x) \leq 0$(nulle en 0 uniquement) donc $f'(x) < 0$ sur] 0 ; + ∞ [. La fonction f est strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [.

3. La fonction f est définir, continue, strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [,
$f(1) \approx 7{,}59$ et $f(80) \approx 1{,}31$ donc $f(80) < 5{,}9 < f(1)$ donc l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur l'intervalle [1 ; 80].

La fonction f est strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [donc pour tout x de] 0 ; 1], $f(x) \geq f(1)$ soit $f(x) > 7$ donc l'équation $f(x) = 5{,}9$ n'admet pas solution sur l'intervalle] 0 ; 1].
Pour tout x de [80 ; + ∞ [, $f(80) \geq f(x)$ soit $f(x) < 2$ donc l'équation $f(x) = 5{,}9$ n'admet pas solution sur l'intervalle [80 ; + ∞ [.
L'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution α sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

$f(8{,}1) \approx 5{,}902$ et $f(8{,}2) \approx 5{,}882$ donc $\alpha \approx 8{,}1$.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1. *a.* $d = 105$ donc $C(t) = \frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$ donc $C(6) = \frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) = \frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{3a}{40}}\right) = f(a)$

b. C(6) = 5,9 donc $\frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{3a}{40}}\right) = 5{,}9$ donc $f(a) = 5{,}9$ donc d'après la question 3 de la partie B, $a = 8{,}1$.

2. $C(t) = \frac{d}{8{,}1}\left(1 - e^{-\frac{8{,}1}{80}t}\right)$ or $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{8{,}1}{80}t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \frac{d}{8{,}1}$.

Le traitement est efficace si le plateau est égal à 15 donc si $\frac{d}{8{,}1} = 15$ soit $d = 15 \times 8{,}1$.

$d \approx 121{,}5$ µ mol.h^{-1}.

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

1. en B3, la formule est = (A3 + 1) * B2 / (2*A3 + 4) ou ((A3 + 1) / (2*A3 + 4)) * B2

2. *a.* D'après la feuille de calcul, $v_n = \frac{1}{2^n}$.

b. $u_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+2)} u_n$ or $u_n = \frac{1}{n+1} v_n$ donc en remplaçant : $\frac{1}{n+2} v_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+2)} \times \frac{1}{n+1} v_n$

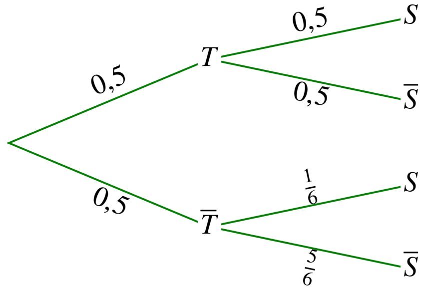
donc après simplification $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = u_0 = 1$ donc $v_n = \frac{1}{2^n}$.

3. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, $u_n = \frac{1}{n+1} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1. **Affirmation 1 : fausse**

Soit T l'événement : « le dé est truqué »
Soit S l'événement : « le 6 apparaît »



$P(S) = P(S \cap T) + P(S \cap \overline{T})$

$P(S) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Sachant que l'on obtient le 6, la probabilité le dé lancé soit truqué est

$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

2. **Affirmation 2 : vraie**

$z_M = 2\left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\, i$ donc $x_M = 1$

$z_N = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6 - 3i - 2i + i^2}{5} = \frac{5 - 5i}{5} = 1 - i$ donc $x_N = 1$

La droite (MN) a pour équation $x = 1$ donc la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

3. **Affirmation 3 : vraie**

Un vecteur directeur de la droite d est $\vec{u}$ (1 ; 0 ; 2)

$\overrightarrow{AB}$ (2 ; – 1 ; – 1) et $\overrightarrow{AC}$ (6 ; 0 ; – 3) donc $\overrightarrow{AB} . \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$ et $\overrightarrow{AC} . \vec{u} = 6 - 3 \times 2 = 0$

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc la droite d est orthogonale au plan (ABC).

4. **Affirmation 4 : fausse**

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d et Δ ne sont pas parallèles.

La droite Δ a pour représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 4 + k, \\ z = 1 + 3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

Si ces droites sont coplanaires, les droites d et Δ n'étant pas parallèles, sont sécantes.
Leur point d'intersection a ses coordonnées qui vérifient :

$\begin{cases} 1 + 2k = 1 + t \\ 4 + k = 2, \\ 1 + 3k = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = t \\ k = -2, \\ 3k = 2 + 2t \end{cases}$ or $\begin{cases} k = -2 \\ t = -4 \\ -2 \times 3 = 2 + 2 \times (-4) \end{cases}$ soit $\begin{cases} k = -2 \\ t = -4 \\ -6 = -6 \end{cases}$ donc les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées (– 3 ; 2 ; – 5).

EXERCICE 4 3 points Commun à tous les candidats

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \frac{1}{1 + x}$, la fonction f est définie continue positive sur [0 ; 1] donc I est l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$.

2. $I = \int_0^1 \frac{1}{1 + x}\, dx = \left[\ln(1 + x)\right]_0^1 = \ln 2$

Partie B : estimation de la valeur de J

1.

Variables	*n, c, f , i, x, y* sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de *n*
	c prend la valeur 0
	Pour *i* allant de 1 à *n* faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    Si $\frac{1}{1 + x^2} \leq y$ alors
	        c prend la valeur *c* + 1
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur $\frac{c}{n}$.

Sortie	Afficher *f*

2. On a $n = 1\,000$ donc $n \geq 30$ et $f = 0{,}781$ donc $n\,f = 781$, $n\,f \geq 5$ et $n\,(1 - f) = 219$ donc $n\,(1 - f) \geq 5$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% est donc : I = $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$ soit I ≈ [0,749 ; 0,813].

3. L'amplitude de l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, est $\left(f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) - \left(f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

Cette amplitude est inférieure ou égale à 0,02 si et seulement si $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ soit $\sqrt{n} \geq \dfrac{2}{0{,}02}$ donc $n \geq 100^2$ soit $n \geq 10\,000$.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$P(T \leq a) = \displaystyle\int_0^a \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$ donc pour tout réel a positif, $P(T > a) = 1 - P(T \leq a) = e^{-\lambda a}$.

Partie A : étude d'un exemple

1. $P(T \geq 180) = e^{-180\lambda} = e^{-\frac{180}{2\,800}} = e^{-\frac{9}{140}}$ donc $P(T \geq 180) \approx 0{,}938$

2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?
T suit une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{(T \geq 180)}(T \geq 180 + 180) = P(T \geq 180) \approx 0{,}938$

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

On a $n = 400$ donc $n \geq 30$ et $p = 0{,}94$ donc $n\,p = 376$, $n\,p \geq 5$ et $n\,(1 - p) = 24$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$.

Un intervalle de fluctuation au niveau de confiance de 95% est donc : I = $\left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}} \right]$

soit I ≈ [0,916;0,964]

$f = 1 - \dfrac{32}{400} = 0{,}92$, $f \in$ I donc au vu des résultats des tests, on ne peut pas remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant.

Partie C : dans une salle de spectacle

1. A la calculette : $P(X > 445) \approx 0{,}247$

2. $P(X \geq a) > 0{,}95 \Leftrightarrow a < 427$

On doit donc prévoir un stock d'au moins $500 - 427 = 73$ lampes pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 %.

EXERCICE 5 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : ligne de transmission

1. *a.* Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a\,d - b\,c \neq 0$

Dans le cas de P, $a\,d - b\,c = -1 \times 1 - 1 \times 1 = -2$ donc P est inversible.

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \\ c + d = 0 \\ c - d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \dfrac{1}{2} \\ d = -c \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

b. On pose : $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\,p-1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{P\,D\,P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\,p-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\,p-1 \\ 1 & 1-2\,p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{P\,D\,P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + 0{,}5\,(2\,p-1) & 0{,}5 + 0{,}5\,(2\,p-1) \\ 0{,}5 + 0{,}5\,(1-2\,p) & 0{,}5 - 0{,}5\,(1-2\,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \mathrm{A}$$

c. Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{P\,D}^n\,\mathrm{P}^{-1}$.

Initialisation :

Si $n = 1$, d'après la question précédente : $\mathrm{P\,D\,P}^{-1} = \mathrm{A}$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, si $\mathrm{A}^n = \mathrm{P\,D}^n\,\mathrm{P}^{-1}$ alors $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{P\,D}^{n+1}\,\mathrm{P}^{-1}$.

$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^n = \mathrm{P\,D\,P}^{-1}\,\mathrm{P\,D}^n\,\mathrm{P}^{-1}$ or $\mathrm{P\,P}^{-1}\,\mathrm{I}_2$ donc $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{P\,D\,D}^n\,\mathrm{P}^{-1}$ donc $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{P\,D}^{n+1}\,\mathrm{P}^{-1}$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier $n \geq 1$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{P\,D}^n\,\mathrm{P}^{-1}$.

d. D'après la copie d'écran $\mathrm{P\,D}^n\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{(2\,p-1)^n}{2} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{(2\,p-1)^n}{2} \end{pmatrix}$ soit $\mathrm{A}^n\,\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{(2\,p-1)^n}{2} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{(2\,p-1)^n}{2} \end{pmatrix}$ donc

$X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{(2\,p-1)^n}{2} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{(2\,p-1)^n}{2} \end{pmatrix}$ donc $q_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(2\,p-1)^n}{2}$

2. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25 donc il faut que $q_n \leq 0{,}25$

soit $\dfrac{1}{2} - \dfrac{(2\,p-1)^n}{2} \leq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{(2\,p-1)^n}{2} \geq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow (2\,p-1)^n \geq 0{,}5$ avec $p = 0{,}98$ soit $0{,}96^n \geq 0{,}5$

$n \ln 096 \geq \ln 0{,}5 \Leftrightarrow n \leq \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}96} \Leftrightarrow n \leq 16$

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

1. Préliminaires

a. c_1, c_2 et c_3 sont les restes de divisions euclidiennes par 2 donc c_1, c_2 et c_3 sont des entiers compris entre 0 (inclus) et 2 (exclu).

c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

b. Le mot est 1001 donc $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.

$b_2 + b_3 + b_4 = 1$ donc $c_1 = 1$

$b_1 + b_3 + b_4 = 2$ donc $c_2 = 0$

$b_1 + b_2 + b_4 = 2$ donc $c_3 = 0$, la clé de contrôle est 100

2. si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :

– c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2, donc ne dépend pas de b_1 donc la valeur de c_1 est inchangée ;

– c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ; si on change la valeur de b_1 (0 devient 1 ou 1 devient 0) donc $b_1 + b_3 + b_4$ change donc c_2 est modifié ($c_2 = 1$ devient $c_2 = 0$ ou $c_2 = 0$ devient $c_2 = 1$)

– c_3 est le reste de la di vision euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2 ; si on change la valeur de b_1 (0 devient 1 ou 1 devient 0) donc $b_1 + b_2 + b_4$ change donc c_3 est modifié ($c_3 = 1$ devient $c_3 = 0$ ou $c_3 = 0$ devient $c_3 = 1$)

3. Il faut lire le tableau en colonne : si b_1 est erroné alors c_1 est juste et c_2 et c_3 sont faux

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J	F	F	F	F	F	J	J
c_2	F	J	F	F	J	F	J	J
c_3	F	F	J	F	J	J	F	J

4. Si aucun bit n'est modifié alors :
c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 donc $b_2 + b_3 + b_4 = 2k + c_1$ donc $c_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2(k + c_1)$
soit $c_1 + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$ [2]
de même
$c_2 + b_1 + b_3 + b_4 \equiv 0$ [2]
$c_3 + b_1 + b_2 + b_4 \equiv 0$ [2]

Soit $S_1 = c_1 + b_2 + b_3 + b_4$, $S_2 = c_2 + b_1 + b_3 + b_4$ et $S_3 = c_3 + b_1 + b_2 + b_4$
Si un bit reçu est erroné,

- soit l'erreur porte sur un terme b_i ($1 \le i \le 3$) et deux sommes sont congrues à 1 modulo 2,
- soit l'erreur porte sur b_4 et trois sommes sont congrues à 1 modulo 2.
- soit le terme est c_i ($1 \le i \le 3$) et une seule somme est modifiée.

Si une seule somme (par exemple S_1) est congrue à 1 modulo 2, alors c_1 est erroné (de même pour S_2 et S_3).

Si deux sommes sont erronées
les sommes S_2 et S_3 sont congrues à 1 modulo 2, donc l'erreur porte sur le terme commun à ces deux sommes soit b_1.
les sommes S_1 et S_3 sont congrues à 1 modulo 2, donc l'erreur porte sur le terme commun à ces deux sommes soit b_2.
les sommes S_1 et S_2 sont congrues à 1 modulo 2, donc l'erreur porte sur le terme commun à ces deux sommes soit b_3.

Si les trois sommes sont égales à 1 modulo 2 alors l'erreur est sur b_4.

Dans tous les cas on peut diagnostiquer l'erreur et la corriger.

5. A = 0100010 alors :
$c_1 + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 1$ [2]
$c_2 + b_1 + b_3 + b_4 \equiv 1$ [2]
$c_3 + b_1 + b_2 + b_4 \equiv 1$ [2] donc l'erreur porte sur b_4 le le message corrigé est 0101010

B = 1101001 alors :
$c_1 + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$ [2]
$c_2 + b_1 + b_3 + b_4 \equiv 0$ [2]
$c_3 + b_1 + b_2 + b_4 \equiv 0$ [2]
Le message ne comporte pas d'erreur de transmission.