On considère un triangle ABC du plan.

1. *a*. Déterminer et construire le point G, barycentre de {(A ; 1) ; (B ; – 1) ; (C ; 1)}.

b. Déterminer et construire le point G' , barycentre de {(A ; 1) ; (B ; 5) ; (C ; – 2)} .

2. *a*. Soit J le milieu de [AB]

Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).

b. Montrer que le barycentre I de {(B ; 2) ; (C ; – 1} appartient à (G G') .

3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [OA].

a. Déterminer trois réels *a*, *d* et *c* tels que K soit barycentre de {(A ; *a*) ; (D ; *d*) ; (C ; *c*)} .

b. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).

Déterminer les réels *a*' et c' tels que X soit barycentre de {(A ; *a*') ; (C ; c')} .

CORRECTION

1. *a*. Déterminer et construire le point G, barycentre de {(A ; 1) ; (B ; – 1) ; (C ; 1)}.

Soit B' le milieu de [AC], G est le barycentre de {(B' ; 2) ; (B ; – 1)} donc (2 – 1) $\overrightarrow{BG} = 2\ \overrightarrow{BB'}$ donc $\overrightarrow{BG} = 2\ \overrightarrow{BB'}$

G est le symétrique de B par rapport à B'.

b. Déterminer et construire le point G' , barycentre de {(A ; 1) ; (B ; 5) ; (C ; – 2)}.

Soit E le barycentre de {(A ; 1) ; (C ; – 2)} alors (1 – 2) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA}$ donc E est le symétrique de A par rapport à C

G' est le barycentre de {(I ; – 1) ; (B ; 5)} alors (– 1 + 5) $\overrightarrow{BG'} = -\overrightarrow{BI}$ donc $\overrightarrow{BG'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BI}$

2. *a*. Soit J le milieu de [AB]

Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).

G, barycentre de {(A ; 1) ; (B ; – 1) ; (C ; 1)} donc $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

G' , barycentre de {(A ; 1) ; (B ; 5) ; (C ; – 2)} donc $\overrightarrow{G'A} + 5\,\overrightarrow{G'B} - 2\,\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$ donc $4\,\overrightarrow{AG'} = 5\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}(3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC})$

$4\,\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{JA} + 5\,\overrightarrow{JB} - 2\,\overrightarrow{JC} = 4\,\overrightarrow{JB} - 2\,\overrightarrow{JA} - 2\,\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$

$4\,\overrightarrow{JG'} = 3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC})$

donc $\overrightarrow{GG'} = \frac{3}{4}(3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{JG'}$ donc J appartient à (GG'), de plus J appartient à (AB) donc J est le point d'intersection des droites (GG') et (AB).

b. $(2-1)\overrightarrow{JI} = 2\ \overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JC}$ donc $\overrightarrow{JI} = 2\,\overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JA} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC})$

J appartient à (GG') et $(3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC})$ est un vecteur directeur de $\overrightarrow{GG'}$ donc le barycentre I de {(B ; 2) ; (C ; – 1} appartient à (G G').

donc $\overrightarrow{GG'} = 2\ \overrightarrow{G'B} - \overrightarrow{G'C} - (2\ \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) = 2\ \overrightarrow{GG'}$

3. *a*. K est le milieu de [OA] donc est le barycentre de {(A ; 2) ; (O ; 2)}.

O est le milieu de [CD] donc est le barycentre de {(C ; 1) ; (D ; 1)}.

Le barycentre de {(A ; 2) ; (D ; 1) ; (C ; 1)} est aussi le barycentre de {(A ; 2) ; (O ; 2)}.

donc K est le barycentre de {(A ; 2) ; (D ; 1) ; (C ; 1)}

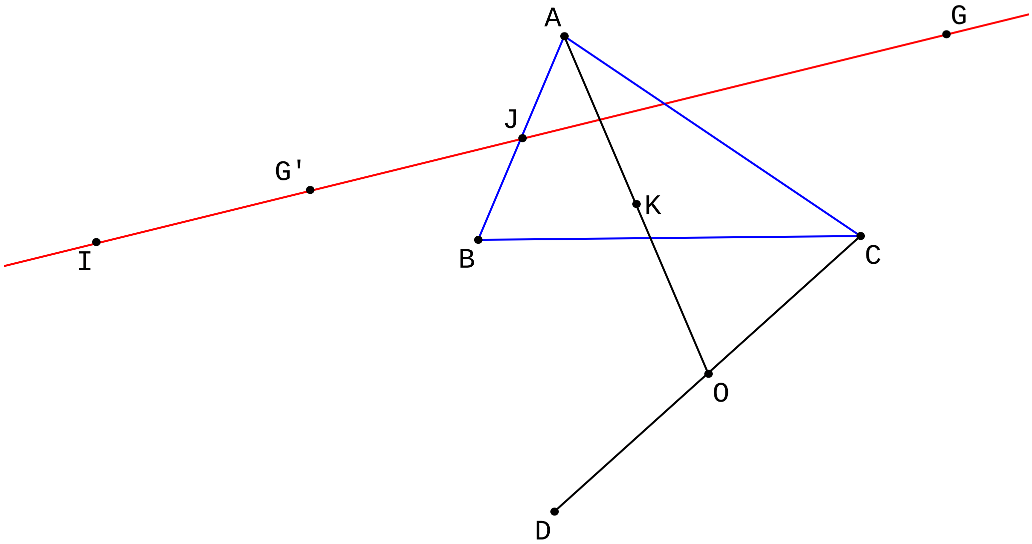
b. Si D n'appartient pas à (AC) alors K n'appartient pas à (AC) donc X ≠ K

tout M point de (DK) différent de K est le barycentre de {(K ; 4) (D ; *d*)} donc est aussi le barycentre de {(A ; 2) ; (D ; 1) ; (C ; 1) (D ; *d*)}, on a $(d+4)\,\overrightarrow{AM} = (d+1)\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

si *d* = – 1 alors ce point appartient aussi à (AC) donc est le point d'intersection de (DK) et (AC).

X est le barycentre de {(A ; 2) ; (C ; 1)}

Si D appartient à (AC) alors O et K appartiennent à (AC) les droites (DK) et (AC) sont confondues, *a*' et c' sont quelconques de somme non nulle.



A
G
J
G'
K
I
B
C
O
D