Nouvelle-Calédonie mars 2009

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3 + 4\,i$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i\,(-2 - \sqrt{3})$ et $z_D = -2\sqrt{3} + i\,(-2 + \sqrt{3})$.

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. *a.* Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle C de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2\,i$.

b. Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].

c. Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.

Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$. On considère les points : A(4 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) et E $\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{9}\right)$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit (P) un plan d'équation a $x + b\,y + c\,z + d = 0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $(x_M\,;y_M\,;z_M)$ la distance δ_M du point M au plan (P) est égale à : $\frac{\left|a\,x_M + b\,y_M + c\,z_M + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. *a.* Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 6 ; 4). Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3\,x + 6\,y + 4\,z - 12 = 0$.

d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. *a.* Montrer que la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2\,t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}\,t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n$, puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0{,}6665$.

EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (1 + x)\,e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. *a.* Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. *a.* À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b : $\int_a^b f(x)\,dx = (-2 - b)\,e^{-b} + (2 + a)\,e^{-a}$.

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* La rotation de centre A d'angle $\frac{2\pi}{3}$ a pour écriture complexe : $z' - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-1)$ donc B a pour image le point d'affixe z' telle que : $z' - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(3 + 4\,i - 1)$ soit $z' - 1 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+4\,i) = (-1+\sqrt{3}\,i)(1+2\,i)$

$z' = -1 + \sqrt{3}\,i - 2 - 2\sqrt{3} + 1 = -2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3}) = z_D$

L'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. AB = $|3 + 4\,i - 1| = |2 + 4\,i| = 2\sqrt{5}$

l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D donc AB = AD

les points B et D sont sur un cercle C de centre A de rayon $2\sqrt{5}$.

2. *a.* L'homothétie de centre B de rapport $\frac{3}{2}$ a pour écriture complexe $z' - (3 + 4\,i) = \frac{3}{2}[z - (3 + 4\,i)]$

A a pour image le point d'affixe z' telle que : $z' - (3 + 4\,i) = \frac{3}{2}[1 - (3 + 4\,i)]$ soit $z' = 3 + 4\,i + \frac{3}{2}(-2 - 4\,i) = 3 + 4\,i - 3 - 6\,i = -2\,i$.

L'affixe z_F du point F est $-2\,i$.

b. $\frac{z_C + z_D}{2} = \frac{1}{2}[2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3})] = -2\,i$ donc le point F est le milieu du segment [CD].

c. Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.

$z_C - z_F = 2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3}) + 2\,i = 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

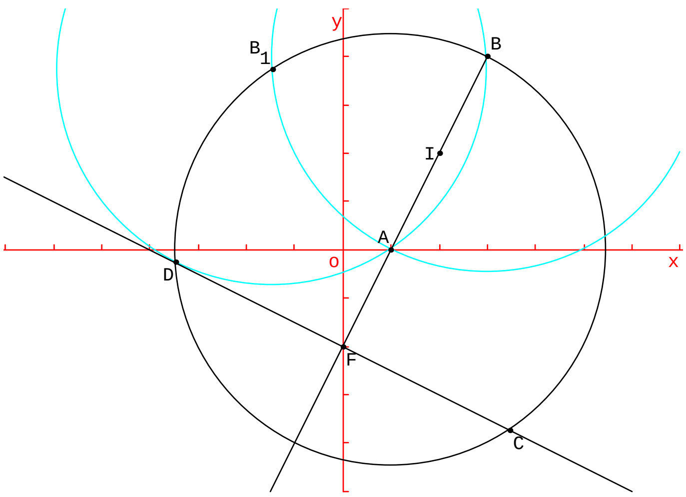
$-i\sqrt{3}\,(z_A - z_F) = -i\sqrt{3}\,(1 + 2\,i) = 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} = z_C - z_F$ donc $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$.

$|-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et $\arg(-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $-i\sqrt{3} = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$

donc $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc la droite (AF) est perpendiculaire à (CD), de plus le point F est le milieu du segment [CD] donc la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

3. l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D il suffit donc de tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre A de rayon aB, puis de tracer le cercle de centre B passant par A qui recoupe $\mathcal{C}$ en deux points B_1 et B_2 avec B_1 tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_1}) = \frac{\pi}{3}$

puis de tracer le cercle de centre B_1 passant par A qui recoupe $\mathcal{C}$ en deux points D et D_1 avec D tel que $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$



F est l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$ donc il suffit de tracer la demi-droite [BA) de placer le milieu I de [AB] et placer F symétrique de I par rapport à A.

la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD] donc C est le symétrique orthogonal de D par rapport à (AF), [AF] étant un diamètre de $\mathcal{C}$, il suffit de tracer la perpendiculaire en D à (AF) qui recoupe $\mathcal{C}$ en deux points D et C.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 4 ; 2 ; 0) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 4 ; 0 ; 3)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C déterminent bien un plan.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 6 ; 4). Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{n} = -4 \times 3 + 2 \times 6 + 0 \times 4 = 0$ et $\overrightarrow{AC}\,.\,\vec{n} = -4 \times 3 + 0 \times 6 + 3 \times 4 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc est un vecteur normal au plan (ABC).

c. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc (ABC) *a* une équation de la forme $3x + 6y + 4z + d = 0$.

A ∈ (ABC) donc $3 \times 4 + 6 \times 0 + 4 \times 0 + d = 0$ soit $d = -12$ donc une équation du plan (ABC) est : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

d. $$\delta_E = \frac{\left|3\times\frac{2}{3} + 6 \times\frac{-2}{3} + 4\times\frac{1}{9} - 12\right|}{\sqrt{9+36+16}} = \frac{\left|2 - 4 + \frac{4}{9} - 12\right|}{\sqrt{9+36+16}} = \frac{\frac{122}{9}}{\sqrt{61}} = -\frac{122}{9\sqrt{61}} = \frac{2\sqrt{61}}{9}$$

2. *a.* Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\left(1\,;2\,;\frac{4}{3}\right)$ donc $\vec{u} = 3\,\vec{n}$, $\vec{n}$ est donc un vecteur directeur de (D) or $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC).

Le point de (D) de paramètre $t = -\frac{1}{3}$ a pour coordonnées $x = \frac{2}{3}$; $y = -\frac{2}{3}$ et $z = \frac{1}{9}$ donc la droite (D) passe par le point E.

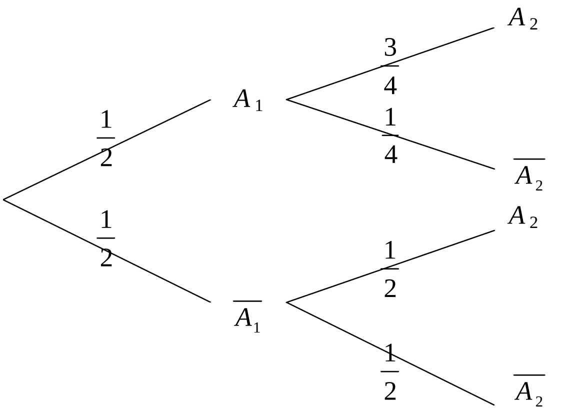
b. La droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E donc le projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC) est le point d'intersection de (D) et du plan (ABC).

G *a* des coordonnées de la forme $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \end{cases}$ et appartient au plan (ABC) donc $3(1 + t) + 6 \times 2t + 4\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{3}t\right) - 12 = 0$.

$-\frac{61}{9} + \frac{61}{3}t = 0$ soit $t = \frac{1}{3}$ donc G a pour coordonnées $x = 1 + \frac{1}{3}$; $y = 2 \times \frac{1}{3}$; $z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{3}$ soit $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$

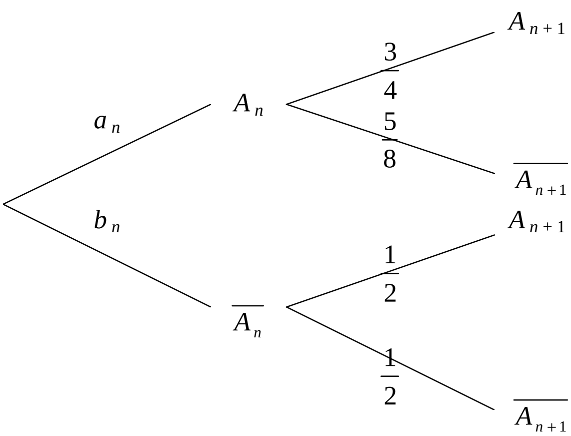
c. $$EG^2 = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 = \frac{244}{81} = \frac{4\times 61}{81}$$ donc $\delta_E = EG = \frac{2\sqrt{61}}{9}$

EXERCICE 3 **5 points** **Commun à tous les candidats**



1. $a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = 1 - a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ et $b_2 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$: on a la situation représentée par l'arbre pondéré ci-contre donc :

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ donc

$a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + b_n \frac{1}{2}$

$a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n)$

$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2}$.

3. *a.* $a_n = U_n + \frac{2}{3}$ donc en remplaçant dans $a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2}$ on obtient $U_{n+1} + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(U_n + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}$.

soit $U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n$ donc (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ de premier terme $U_1 = a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$

b. $U_n = q^{n-1} U_1 = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ donc $a_n = U_n + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$

c. $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}$

d. $a_n > 0{,}6665 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3} > 0{,}6665 \Leftrightarrow -2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 > 3 \times 0{,}665 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right)^n < 2 - 3 \times 0{,}665$

$\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{2 - 3 \times 0{,}6665}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0{,}00025 \Leftrightarrow n \ln 0{,}25 < \ln 0{,}00025 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}00025}{\ln 0{,}25}$ donc $n \geq 6$

le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0{,}6665$ est 6

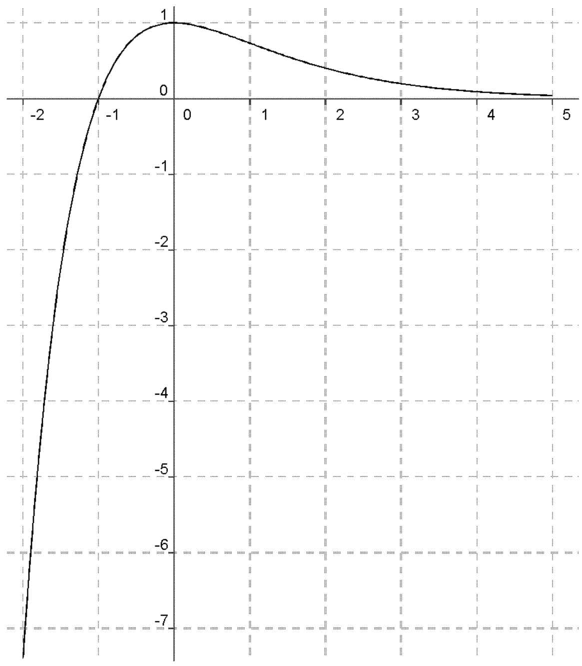
EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

1. *a.* La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f a le même signe que $1 + x$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = x\,e^{-x} + e^{-x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



c. Soit $u(x) = 1 + x$ et $v(x) = e^{-x}$ alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$
$f = u\,v$ donc $f' = u'\,v + v'\,u$ donc $f'(x) = e^{-x} + (1 + x)(-e^{-x}) = -x\,e^{-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d.

2. *a.* La fonction f est définie continue positive sur $[-1\,;\,n]$ donc I_n mesure l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = -1$; $x = n$ donc $I_n > 0$.

b. $I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

La fonction f est définie continue positive sur $[n\,;\,n+1]$ donc $\int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, donc la suite (I_n) est croissante.

3. *a.* Soit $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 1 + x$ alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$.

$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-(1+x)\,e^{-x}\right]_a^b - \int_{a}^{b} -e^{-x}\,\mathrm{d}x = -(1+b)\,e^{-b} + (1+a)\,e^{-a} - \left[e^{-x}\right]_a^b = -(1+b)\,e^{-b} + (1+a)\,e^{-a} - (e^{-b} - e^{-a})$

$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\,e^{-b} + (2+a)\,e^{-a}$.

b. En remplaçant a par -1 et b par n dans l'expression de $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, on obtient $I_n = -(2+n)\,e^{-n} + e$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,e^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = e$

d. I_n mesure l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = -1$; $x = n$ donc l'aire située dans le demi-plan $x \geq 0$, comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et la droite d'équation $x = -1$ a pour mesure e *u.a*.

4. $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = e \Leftrightarrow (-2-\alpha)\,e^{-\alpha} + e = e \Leftrightarrow (-2-\alpha)\,e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ (La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$)

La fonction f est continue négative sur $[-2\,;\,-1]$ donc l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = -1$; $x = -2$ a pour mesure $\int_{-2}^{-1} -f(x)\,\mathrm{d}x$ soit $\int_{-1}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$ donc ce calcul intégral correspond au calcul de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = -1$; $x = -2$