Polynésie juin 2000

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), unité graphique 4 cm.

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de − 2, associe Z = $f(z) = \frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}$.

1. Si $z = x + \mathrm{i}\, y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

On vérifiera que $\mathbb{R}\mathrm{e}(Z) = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$. En déduire la nature de :

a. l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;

b. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

c. Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$.

En remarquant que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3. Calculer $| f(z) - 1 | \times | z + 2 |$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

CORRECTION

1. Si $z = x + \mathrm{i}\, y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

$$Z = \frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}} = \frac{(x-2)+\mathrm{i}\,(y+1)}{x+\mathrm{i}\,(y+2)}$$

$$Z = \frac{[(x-2)+\mathrm{i}\,(y+1)]\,[x-\mathrm{i}\,(y+2)\,]}{[\,x+\mathrm{i}\,(y+2)\,]\,[\,x-\mathrm{i}\,(y+2)\,]}$$

$$Z = \frac{x\,(x-2)+\ (y+1)\,(y+2)+\mathrm{i}\,[x\,(y+1)-(x-2)\,(y+2)]}{x^2+(y+2)^2}$$

$$Z = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2} + \mathrm{i}\ \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

a. En déduire la nature de l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;

Z est réel $\Leftrightarrow \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$ et $z \neq -2\,\mathrm{i}$

Le point d'affixe – 2 i appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$

donc E est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$ privée du point B d'affixe – 2 i

b. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

Z est un imaginaire pur éventuellement nul $\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$ et $z \neq -2\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 - 1 - \frac{9}{4} + 2 = 0$ et $z \neq -2\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ et $z \neq -2\,\mathrm{i}$

Soit Ω le point de coordonnées $\left(1\,;\frac{3}{2}\right)$

$\Omega M^2 = (x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2$

Z est un imaginaire pur éventuellement nul $\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{5}{4}$ et $M \neq B \Leftrightarrow \Omega M = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $M \neq B$

or $0^2 + 2^2 - 2 \times 0 + 3 \times 2 + 2 = 0$ donc le point B appartient au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$

donc F est le cercle de centre Ω de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé de B.

c. Représenter ces deux ensembles.

2. Retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

k désigne dans cette question un entier relatif

$$\text{Z réel} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Z est réel non nul} \\ \text{ou} \\ \text{Z est nul} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z-z_A}{z-z_B} \text{ est réel et } z \neq z_A \text{ et } z \neq z_B \\ \text{ou} \\ \dfrac{z-z_A}{z-z_B} = 0 \text{ et } z \neq z_B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arg \dfrac{z-z_A}{z-z_B} = 0 + 2k\pi \text{ ou } \arg \dfrac{z-z_A}{z-z_B} = \pi + 2k\pi \text{ et } z \neq z_A \text{ et } z \neq z_B \\ \text{ou} \\ z = z_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0 + 2k\pi \text{ ou } (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi + 2k\pi \text{ avec M} \neq \text{A et M} \neq \text{B} \\ \text{ou} \\ \text{M = A} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ les points M, A, B sont alignés et M $\neq$ B

$\Leftrightarrow$ E est la droite (AB) privée du point B

$$\text{Z imaginaire pur éventuellement nul} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Z est imaginaire pur non nul} \\ \text{ou} \\ \text{Z est nul} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z-z_A}{z-z_B} \text{ est imaginaire pur et } z \neq z_A \text{ et } z \neq z_B \\ \text{ou} \\ \dfrac{z-z_A}{z-z_B} = 0 \text{ et } z \neq z_B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arg \dfrac{z-z_A}{z-z_B} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \arg \dfrac{z-z_A}{z-z_B} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } z \neq z_B \text{ et } z \neq z_B \\ \text{ou} \\ z = z_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec M} \neq \text{A et M} \neq \text{B} \\ \text{ou} \\ \text{M = A} \end{cases} \Leftrightarrow \text{le triangle MAB est rectangle en M et M} \neq \text{B}$$

$\Leftrightarrow$ F est le cercle de diamètre [AB] privé du point B

3. $f(z) - 1 = \dfrac{z-2+i}{z+2i} - 1 = \dfrac{-2-i}{z+2i}$ donc $[f(z) - 1]\,[z + 2i] = -2 - i$

$|-2-i|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

donc $|f(z) - 1| \times |z + 2i| = |-2-i| = \sqrt{5}$

lorsque le point M d'affixe *z* parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, alors $|z + 2i| = \sqrt{5}$

donc $|Z - 1|\ \sqrt{5} = \sqrt{5}$ soit $|Z - 1| = 1$

Soit I le point d'affixe 1, IM' = 1 donc M' décrit le cercle de centre I de rayon 1.