Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Filière SMPC
Semestre S1

Module Physique 1
TD de Thermodynamique
Corrigé de la série N°1

Exercice 1 :

* δf est-elle une différentielle exacte ?

Posons : $P(x,y,z) = 2xz$; $Q(x,y,z) = 4yz$ et $R(x,y,z) = x^2 + y^2$ de sorte que $\delta f = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

δf est une différentielle exacte $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$

On a :

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 4y \qquad \dfrac{\partial R}{\partial y} = 2y$

On constate que $\dfrac{\partial Q}{\partial z} \neq \dfrac{\partial R}{\partial y}$, donc δf n'est pas une différentielle exacte.

* δg est-elle une différentielle exacte ?

Posons : $P'(x,y,z) = 2xz$; $Q'(x,y,z) = 2yz$ et $R'(x,y,z) = x^2 + y^2$ de sorte que $\delta g = P'(x,y,z)dx + Q'(x,y,z)dy + R'(x,y,z)dz$.

On a :

$\dfrac{\partial P'}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial Q'}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial Q'}{\partial z} = 2y \qquad \dfrac{\partial R'}{\partial y} = 2y$

$\dfrac{\partial P'}{\partial z} = 2x \qquad \dfrac{\partial R'}{\partial x} = 2x$

Comme $\dfrac{\partial P'}{\partial y} = \dfrac{\partial Q'}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q'}{\partial z} = \dfrac{\partial R'}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P'}{\partial z} = \dfrac{\partial R'}{\partial x}$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, δg est une différentielle exacte et $\delta g = dg$.

* Calcul de $g(x,y,z)$

On a $dg = 2xzdx + 2yzdy + (x^2 + y^2)dz = \dfrac{\partial g}{\partial x}dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}dz$. Donc

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2xz$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2yz$ et $\dfrac{\partial g}{\partial z} = x^2 + y^2$

Intégrant $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ par rapport à x, à y et z constants, on obtient : $g(x,y,z) = zx^2 + \varphi(y,z)$.

D'où $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2yz = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \varphi(y,z) = zy^2 + \psi(z)$. Ainsi $g(x,y,z) = zx^2 + zy^2 + \psi(z)$. Mais $\dfrac{\partial g}{\partial z} = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + \dfrac{d\psi}{dz}$, donc $\dfrac{d\psi}{dz} = 0$, soit $\psi(z) = cste$. Finalement $\boxed{g(x,y,z) = z(x^2+y^2) + cste}$.

<u>Exercice 2:</u>

1) La différentielle dP s'écrit : $dP = \dfrac{R}{V-b}dT + \left(\dfrac{2a}{V^3} - \dfrac{RT}{(V-b)^2}\right)dV$. On pose $X(V,T) = \dfrac{R}{V-b}$ et $Y(V,T) = \dfrac{2a}{V^3} - \dfrac{RT}{(V-b)^2}$ de sorte que la différentielle s'écrit : $dP = X(V,T)dT + Y(V,T)dV$.

dP est une différentielle totale si $\left(\dfrac{\partial X}{\partial V}\right)_T = \left(\dfrac{\partial Y}{\partial T}\right)_V$. On a :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)_T = -\frac{R}{(V-b)^2} \text{ et } \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_V = -\frac{R}{(V-b)^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_V.$$

Donc dP est bien une différentielle totale.

2) Les expressions des coefficients thermoélastiques s'écrivent: $\alpha = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ et $\beta = \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V$. Le calcul de β se fait facilement à partir de l'équation d'état $P = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}$. On a $\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \dfrac{R}{V-b}$ (on peut aussi utiliser l'expression de dP donnée dans la première question). D'où

$$\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{P}\frac{R}{V-b} = \frac{V^2(V-b)}{RTV^2 - a(V-b)}\frac{R}{V-b} = \frac{RV^2}{RTV^2 - a(V-b)}$$

$$\boxed{\beta = \frac{RV^2}{RTV^2 - a(V-b)}}$$

Pour le coefficient α, le calcul direct à partir de l'équation d'état est fastidieux. Il est plus astucieux de voir que V est défini implicitement en fonction de (T,P) en posant l'équation d'état sous la forme suivante: $f(V,T,P) = P - \dfrac{RT}{V-b} + \dfrac{a}{V^2} = 0$.

D'après le cours, on a : $\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial T}}{\frac{\partial f}{\partial V}}$. Le calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial T}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial V}$ donne : $\dfrac{\partial f}{\partial T} = -\dfrac{R}{V-b}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial V} = \dfrac{RT}{(V-b)^2} - \dfrac{2a}{V^3}$. D'où

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{-\frac{R}{V-b}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}} = \frac{RV^3(V-b)}{RTV^3 - 2a(V-b)^2}$$

et

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{RV^2(V-b)}{RTV^3 - 2a(V-b)^2}.$$

Ou encore partir de $dP = 0 \Rightarrow \dfrac{dV}{dT} = \left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ direct

$$\boxed{\alpha = \frac{RV^2(V-b)}{RTV^3 - 2a(V-b)^2}}$$

3) La relation liant les trois coefficients thermoélastiques se déduit facilement de l'identité remarquable liant les dérivées partielles de variables définies par une équation implicite à 3 variables, à savoir dans ce cas: $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1$.

Cette relation permet d'écrire $V\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \frac{1}{P}\frac{1}{\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}\frac{-\frac{1}{V}}{-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = -1$, soit $\alpha\frac{1}{P}\frac{1}{\beta}\frac{-1}{\chi_T} = -1$,

c'est-à-dire après simplification : $\boxed{\alpha = P\beta\chi_T}$. Il faut remarquer que la relation précédente est tout à fait générale, que le gaz soit parfait ou non. Dans son établissement nous n'avons utilisé en fait que la forme générale de l'équation d'état des gaz $f(V,T,P) = 0$ avec f qui est a priori quelconque.

Le calcul de χ_T peut se faire maintenant aisément à partir des expressions de α et β établies précédemment. On a : $\chi_T = \frac{\alpha}{P\beta} = \frac{(V-b)\left[RTV^2 - a(V-b)\right]}{P\left[RTV^3 - 2a(V-b)^2\right]}$. En substituant $P = \frac{RTV^2 - a(V-b)}{(V-b)V^2}$ dans l'expression ci-dessus de χ_T, il vient

$\chi_T = \frac{\alpha}{P\beta} = \frac{V^2(V-b)^2}{RTV^3 - 2a(V-b)^2}$, soit finalement : $\boxed{\chi_T = \frac{V^2(V-b)^2}{RTV^3 - 2a(V-b)^2}}$.

Exercice 3:

On a : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{\frac{\partial f}{\partial V}}{\frac{\partial f}{\partial P}}$; $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T}}{\frac{\partial f}{\partial V}}$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\frac{\frac{\partial f}{\partial P}}{\frac{\partial f}{\partial T}}$. D'où

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial V}}{\frac{\partial f}{\partial P}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial T}}{\frac{\partial f}{\partial V}}\right)\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial P}}{\frac{\partial f}{\partial T}}\right) = -1, \text{ soit } \boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1}.$$

Exercice 4:

1) Les 102 divisions correspondent à la vapeur d'eau ($100°C$). La division -2 correspond à la glace fondante ($0°C$).

Cherchons la courbe d'étalonnage sous la forme d'une droite (car nous avons seulement deux informations). Posons l'équation thermométrique sous la forme: $\theta = an + b$ où θ est la température en $°C$, n le nombre de divisions lu, et a et b les deux constantes d'étalonnage. On a : $\begin{cases} 100 = a\times 102 + b \\ 0 = a\times(-2) + b \end{cases}$. On en déduit par résolution du

système des deux équations aux deux inconnues a et b, que $a=\frac{100}{104}=0.9615$ et $b=100-\frac{100}{104}102=1.923$ (les résultats sont donnés avec 4 chiffres significatifs).
L'équation thermométrique s'écrit alors : $\boxed{\theta(°C)=0.9615\,n+1.923}$.
2) Pour $n=29$, l'équation thermométrique donne : $\theta(°C)=0.9615\times29+1.923=29.81°C$. En arrondissant à 3 chiffres significatifs : $\theta(°C)=29.8°C$.

Exercice 5:
Une thermistance est une résistance à base d'oxyde métallique dont la valeur de la résistance varie en fonction de la température.
1) La variation de la résistance R est une fonction affine de la température θ, posons alors : $R=a\theta+b$. On a : $\begin{cases}3400=a\times22+b\\2600=a\times28+b\end{cases}$. On en déduit : $\begin{cases}a=-800/6=-133.3\\b=3400+800\times22/6=6333\end{cases}$.
Ce qui donne $\boxed{R=-133.3\,\theta+6333}$. D'où pour $\theta=26°C$, $R_{26}=-133.3\times266+6333=2867\Omega$.
2) Pour $\theta=39°C$, on a relevé expérimentalement $R=1600\,\Omega$.
D'après le modèle extrapolé, on a : $R_{39}=-133.3\times39+6333=1134\Omega$. La valeur trouvée par extrapolation du modèle linéaire à l'extérieur de l'intervalle où il a été établi $[22,28]°C$ n'est pas valide. Il y a trop d'écart, ce qui signifie qu'il y a une nonlinéarité importante du comportement de la thermistance pour $\theta\notin[22,28]$.

Exercice 6:
1) On a : $E=a\theta+b\theta^2=0.2\theta-5\times10^{-4}\theta^2$. On définit une échelle de température par la relation linéaire: $\theta^*=\alpha E+\beta$. On a : $\begin{cases}E(\theta=0)=0.2\times0-5\times10^{-4}\times0=0\,mV\\E(\theta=100)=0.2\times100-5\times10^{-4}\times(100)^2=15\,mV\end{cases}$. Ainsi $\begin{cases}0=\alpha\times0+\beta\\100=\alpha\times15+\beta\end{cases}$, ce qui donne : $\alpha=20/3=6.667$ et $\beta=0$. L'équation thermométrique s'écrit alors : $\boxed{\theta^*=6.667E}$.
2) Calculons l'écart $\theta-\theta^*$ en fonction de E. Pour cela calculons d'abord θ en fonction de E. On a : $E=0.2\theta-5\times10^{-4}\theta^2 \Rightarrow 5\times10^{-4}\theta^2-0.2\theta+E=0$. C'est une équation de second degré en θ. Le discriminent est $\Delta=(0.2)^2-4\times5\times10^{-4}E=10^{-2}(4-0.2E)$. Pour que ce discriminent soit positif $\Delta\geq0$ il ne faut pas que E dépasse $20\,mV$, ce qui est vérifié pour l'intervalle $[0,100]°C$. D'où $\theta_1=\frac{0.2-0.1\sqrt{4-0.2E}}{10^{-3}}=200-100\sqrt{4-0.2E}$ ou $\theta_2=200+100\sqrt{4-0.2E}$. La deuxième solution n'est pas physique : $\theta_2\notin[0,100]°C$. Il faut prendre donc $\theta=200-100\sqrt{4-0.2E}$. L'écart est alors $\boxed{\theta-\theta^*=200-100\sqrt{4-0.2E}-20E/3}$.
3) Posons $f(E)=\theta-\theta^*=200-100\sqrt{4-0.2E}-20E/3$. L'écart est maximum si $f'(E)=0$.

$f'(E) = -100 \frac{-0.2}{2\sqrt{4-0.2E}} - 20/3 = \frac{10}{\sqrt{4-0.2E}} - 20/3$. D'où $f'(E) = 0 \Rightarrow 4 - 0.2E = \frac{9}{4}$, soit $E = 20 - \frac{45}{4} = \frac{35}{4} = 8.75\,\mathrm{mV}$. On peut vérifier que $f''(E) = \frac{0.1}{(4-0.2E)^{3/2}} > 0$. Donc $\theta - \theta^{*} = f(E)$ passe par un minimum en $E = 8.75\,\mathrm{mV}$. Le calcul du minimum donne $f(8.715) = 200 - 100\sqrt{4 - 0.2 \times 8.75} - 6.667 \times 8.75 = -8.333$. D'autre part, la fonction reste tout le temps négative sur l'intervalle $E \in [0, 15]\,\mathrm{mV}$ puisque $f(0) = 0$ et $f(15) = 0$. Donc l'écart maximum en valeur absolue s'obtient bien pour $E = 8.75\,\mathrm{mV}$, et $\theta - \theta^{*} = -8.333°C$. L'utilisation de l'échelle linéaire θ^{*} conduit par conséquent à une erreur par excès qui vaut au maximum $8.333°C$.

Cette erreur n'est pas négligeable dans la pratique. Donc, l'échelle linéaire considérée ici ne suffit pas et l'équation calorimétrique à considérer est soit $\theta = 200 - 100\sqrt{4 - 0.2E}$, ou bien toute autre approximation suffisamment précise de cette expression.