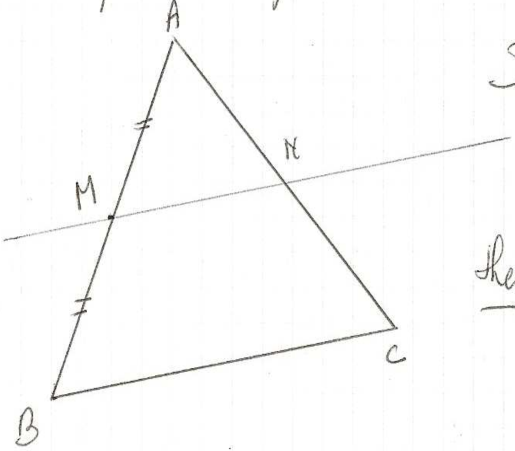
Une application du théorème de Thalès : Le théorème dit des milieux.

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et si elle est parallèle à un autre côté alors elle coupe le 3ème côté en son milieu et la longueur du segment déterminé est égale à la moitié de celle du côté qui lui est parallèle.



Données ΔABC
M milieu de [AB]
N pt de [AC]
$(MN) // (BC)$

Thèse : N milieu de [AC]
$MN = \frac{1}{2} BC$

Démonstration

ΔAMN
ΔABC
car $\hat{A} = \hat{A}$ et $\hat{B} = \hat{M}$ ($\measuredangle$ correspondant)

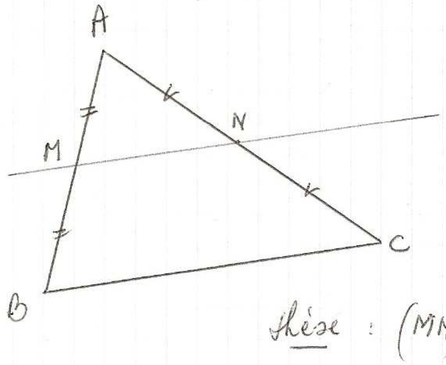
donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ or $\frac{AM}{BA} = \frac{1}{2}$

donc $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ et $AN = \frac{1}{2} AC$ et N est le milieu de [AC]

et $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ donc $MN = \frac{1}{2} BC$.

Réciproquement

Si une droite ~~est~~ passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté et la longueur du segment déterminé est égale à celle du 3ème côté.



Données

ΔABC

M, milieu de $[AB]$

N, milieu de $[AC]$

Thèse : $(MN) \parallel (BC)$

$MN = \frac{1}{2} BC$

Dém : Réciproque du théorème de Thalès

Comme $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC}$ donc $(MN) \parallel (BC)$

Si $(MN) \parallel (BC)$ comme nous venons de le prouver

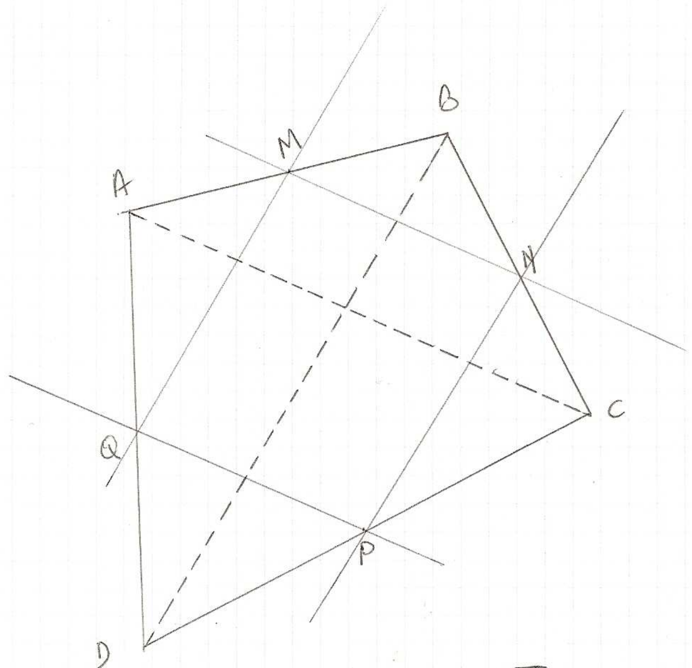
alors $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ car $\hat{A} = \hat{A}$ et $\hat{M} = \hat{B}$

donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ et donc $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ et $MN = \frac{1}{2} BC$.

Petite utilisation du théorème des milieux :

En joignant les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère quelconque, on obtient toujours un parallélogramme.

11



Soit le quadrilatère ABCD. Traçons la diagonale [AC].

Dans le Δ ABC, M étant milieu de [AB] et N milieu [BC], alors

$(MN) \parallel (AC)$ (1)

Dans le Δ ACD, P étant milieu de [CD] et Q milieu de [AC] alors

$(QP) \parallel (AC)$ (2)

(1) et (2) $(MN) \parallel (QP)$

On trace de même la diagonale [BD] et on en déduit que

$(MQ) \parallel (NP)$

<u>En résumé</u> $\left.\begin{array}{l}(MN) \parallel (QP)\\ (MQ) \parallel (NP)\end{array}\right\} \longrightarrow$ <u>MNPQ est un parallélogramme</u>